LYCÉE ERNEST BICHAT **1S**

2009–2010

Devoir maison n°13

Donné le 09/02/2010 – à rendre le 02/03/2010

Exercice 1 Soit ABC un triangle non aplati et H l'orthocentre du triangle ABC. On définit le point O par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$

1. Prouver que $AO^2 - HO^2 = \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$.
   Pour cela, on pourra partir de l'égalité $AO^2 = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HO})^2$.
2. En déduire que $AO^2 - HO^2 = 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'}$, où A' est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
3. Donner sans les démontrer deux égalités analogues à celle de la question précédente.
4. Prouver que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HB'}$.
   On pourra commencer par utiliser le théorème de Pythagore dans deux triangles rectangles d'hypoténuse AB et exprimer de deux manières différentes AB^2 avant d'introduire le point H.
5. En utilisant les trois questions précédentes, démontrer que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
6. Soit G le centre de gravité de ABC. Démontrer que O, H et G sont alignés.

Exercice 2 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 7}{2\sqrt{4x - 2} - 4}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f.
- Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable.
- Calculer la dérivée de f. L'expression de f' devra être donnée sous la forme d'une fraction (avec un seul trait de fraction).