Exercice 1

1.

$$\begin{aligned}
AO^2 - HO^2 &= \overrightarrow{AO}^2 - HO^2 \\
&= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HO})^2 - HO^2 \\
&= AH^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HO} + HO^2 - HO^2 \\
&= AH^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})\right) \\
&= AH^2 + \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \\
&= AH^2 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \\
&= AH^2 - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \\
&= AH^2 - AH^2 + \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})
\end{aligned}$$

On remarque une erreur dans l'énoncé.

2.

$$\begin{aligned}
AO^2 - HO^2 &= \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'} \text{ car } A' \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ et } C \text{ sur } (AH) \\
&= 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'}
\end{aligned}$$

3. On a de même $BO^2 - HO^2 = 2\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HB'}$ et $CO^2 - HO^2 = 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HC'}$ où B' (resp. C') est le projeté orthogonal de B sur (AC) (resp. C sur (AB)).
4. Deux méthodes :
   (a) En utilisant l'indication, on a $AB^2 = AB'^2 + BB'^2$ mais aussi $AB^2 = AA'^2 + BA'^2$.
   Or $BB' = BH + HB'$ et $AA' = AH + HA'$. Ainsi donc :

$$\begin{aligned}
& AB'^2 + (BH + HB')^2 &=& \ (AH + HA')^2 + BA'^2 \\
\Leftrightarrow\ & AB'^2 + BH^2 + 2BH \times HB' + HB'^2 &=& \ AH^2 + 2AH \times HA' + HA'^2 + BA'^2 \\
\Leftrightarrow\ & (AB'^2 + HB'^2) + BH^2 + 2BH \times HB' &=& \ AH^2 + (HA'^2 + BA'^2) + 2AH \times HA' \\
\Leftrightarrow\ & AH^2 + BH^2 + 2BH \times HB' &=& \ AH^2 + BH^2 + 2AH \times HA' \text{ (Pythagore)} \\
\Leftrightarrow\ & 2BH \times HB' &=& \ 2AH \times HA' \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HB'} &=& \ 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'} \text{ (vecteurs de même sens)} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HB'} &=& \ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'}
\end{aligned}$$

   (b) En utilisant le produit scalaire et des projetés orthogonaux bien choisis :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{B'H} \cdot \overrightarrow{HB} = (-\overrightarrow{HB'}) \cdot (-\overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{HB'} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HB'}$$

5. On peut supposer que l'on a également l'égalité $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HC'}$ (elle se prouve de manière analogue). D'après les questions 2. et 3., on peut alors en déduire que

$$AO^2 - HO^2 = BO^2 - HO^2 = CO^2 - HO^2$$

   Autrement dit, en notant $a = AO^2 - HO^2$, on a $AO^2 = BO^2 = CO^2 = a + HO^2$ et donc $AO = BO = CO$. Le point O est par conséquent équidistant des points A, B et C ce qui signifie par définition que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

6. On sait que G, centre de gravité de ABC, vérifie l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. En utilisant la relation de Chasles pour introduire le point H dans tous les vecteurs, on obtient alors :
$$3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{0}$$
C'est à dire $\overrightarrow{HG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{HO}$. Les points G, H et O sont donc alignés.

Exercice 2

1. $f(x)$ est définie si $4x-2\geq 0$, c'est à dire $x\geq \dfrac{1}{2}$ et si $2\sqrt{4x-2}-4\neq 0$, c'est à dire $\sqrt{4x-2}\neq 2$, autrement dit $4x-2\neq 4$, soit $x\neq\dfrac{3}{2}$. Ainsi, $\mathcal{D}_f=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.
2. À cause de la racine carrée, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ sauf en $\dfrac{1}{2}$, donc sur $\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.
3. On peut noter $f=\dfrac{u}{v}$ avec
   $u(x)=2x^2+5x-7$ et donc $u'(x)=4x+5$
   $v(x)=2\sqrt{4x-2}-4$ et donc $v'(x)=2\times\dfrac{4}{2\sqrt{4x-2}}=\dfrac{4}{\sqrt{4x-2}}$
   En effet (pour la dérivée de v), soit $w(x)=\sqrt{4x-2}$.
   On a $w(x)=g(4x-2)$ avec $g(x)=\sqrt{x}$. Comme $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on a
   $$w'(x)=4\times g'(4x-2)=\frac{4}{2\sqrt{4x-2}}=\frac{2}{\sqrt{4x-2}}$$
   Par conséquent, comme $v=2w-4$, on a $v'=2w'$.
   Finalement,
   $$\begin{aligned}
   f' &= \frac{u'v-uv'}{v^2}\\
   f'(x) &= \frac{(4x+5)(2\sqrt{4x-2}-4)-(2x^2+5x-7)\dfrac{4}{\sqrt{4x-2}}}{(2\sqrt{4x-2}-4)^2}\\
   &= \frac{(4x+5)(2\sqrt{4x-2}-4)\sqrt{4x-2}-(2x^2+5x-7)\times 4}{(2\sqrt{4x-2}-4)^2\sqrt{4x-2}}\\
   &= \frac{(4x+5)(2(4x-2)-4\sqrt{4x-2})-(8x^2+20x-28)}{(2\sqrt{4x-2}-4)^2\sqrt{4x-2}}\\
   &= \frac{(4x+5)(8x-4)-8x^2-20x+28-4(4x+5)\sqrt{4x-2}}{(2\sqrt{4x-2}-4)^2\sqrt{4x-2}}\\
   &= \frac{24x^2+4x+8-4(4x+5)\sqrt{4x-2}}{(2\sqrt{4x-2}-4)^2\sqrt{4x-2}}\\
   &= \frac{6x^2+x+2-(4x+5)\sqrt{4x-2}}{(\sqrt{4x-2}-2)^2\sqrt{4x-2}}
   \end{aligned}$$