Chapitre 1

Vecteurs

Activité Acti01_vecteur

A Vecteurs de l'espace

On peut généraliser les vecteurs du plan aux vecteurs de l'espace. Sans se soucier des coordonnées, leur manipulation est similaire.

Définition Lorsque A et B sont deux points de l'espace distincts,
- La **direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB) ;
- Le **sens** de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B ;
- La **longueur** de $\overrightarrow{AB}$ est la longueur du segment $[AB]$. On note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Lorsque $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$.
On utilise souvent une simple lettre minuscule pour désigner un vecteur, comme $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$...
Pour tout point O de l'espace et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.

Définition Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux si l'une des deux propriétés suivantes équivalentes est vérifiée :
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même direction, même sens et même norme.
- $ABCD$ est un parallélogramme (dans le cas où A, B, C et D sont alignés on dit que $ABCD$ est un parallélogramme applati).

Les règles de calcul sont analogues à celles des vecteurs du plan.
On conserve donc :

Proposition (Relation de Chasles) Soit A, B et C trois points de l'espace. Alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Dessin

Rappel L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. On a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Proposition (Règle du parallélogramme) Soit A, B et C trois points de l'espace. Alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme

Dessin

→ **Exercices** 4p180,5p180,10p180 (Chasles), 6p180 (parallélogramme et universalité)

Proposition Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et soit a et b des réels. On a :

$$a(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u}+a\overrightarrow{v} \qquad (a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{u} \qquad a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u} \qquad a\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Définition Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui ont la même direction sont dits **colinéaires**.
Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est considéré colinéaire à tout autre vecteur ($k=0$).

Remarque Pour prouver que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de chercher à démontrer par exemple que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

→ **Exercices** 1,2,3p180 (Chasles inverse & colinéaire)

Définition Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ayant des directions orthogonales sont dits **orthogonaux**. On le note $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est considéré orthogonal à tout autre vecteur.

Nous reviendrons sur l'orthogonalité plus tard.

B Droites et Plans de l'espace

Partie donnée sur feuille, avec la fiche EX01

1 Droites

Définition Étant donnée une droite (d) de l'espace, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ ayant pour extrémités deux points de la droite a pour direction la droite (d).
On dit que $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** de (d)

Définition Étant donnés un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace, la droite passant par A et ayant pour direction la direction de $\overrightarrow{u}$ est notée $(A;\overrightarrow{u})$.

Remarque La droite $(A;\overrightarrow{u})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est à dire tels qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$

Remarque Dire que (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2 Plans

Définition Trois points A, B et C distincts déterminent un unique plan noté (ABC). C'est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

On note aussi le plan $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan.
On dit que (x,y) sont les coordonnées de M dans le plan $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Remarque On peut remplacer les trois points distincts par un point O et deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ainsi $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un plan, ensemble des points M tels qu'il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Remarque Si $\overrightarrow{u'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, alors $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(O, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ représentent le même plan.

C Vecteurs coplanaires

Définition Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace sont dit **coplanaires** si les points O, A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Proposition Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires.
Dire que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Preuve : Soit O un point de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les points O, A et B ne sont pas alignés et déterminent donc un plan, le plan (OAB). Par définition, dire que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires revient à dire $C \in (OAB)$. Autrement dit, C a des coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Cela revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$. □

→ **Exercices** 12p180 (à moitié corrigé), 13p181, 17p181