Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

Activité Égalité de fonctions, graphes

A Sens de variation

Activité haut de la page 12 (fonction racine carrée)

Définition Une fonction f définie sur un intervalle I est croissante sur I si quels que soient x et y dans I on a :

$$\text{Si } x < y \text{ Alors } f(x) \leq f(y) \ (f \text{ conserve l'ordre})$$

Définition Une fonction f définie sur un intervalle I est décroissante sur I si quels que soient x et y dans I on a :

$$\text{Si } x < y \text{ Alors } f(x) \geq f(y) \ (f \text{ change l'ordre})$$

Définition Une fonction est monotone sur un intervalle I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I

Dessin

Exemple Certaines fonctions simples sont croissantes sur $]0; +\infty[$:
$x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exemple la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Exemple La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$.

Exemple Les fonctions constantes ($x \mapsto a$ avec a un nombre fixé) sont à la fois croissantes et décroissantes.

Le sens de variation peut, **dans des cas très précis**, être déterminé grâce à une décomposition de fonctions monotones.

Proposition Soit f et g deux fonctions définies sur l'ensemble D et I un intervalle inclus dans D sur lequel f et g sont monotones. Soit k un nombre réel.

1. Si $k > 0$, alors la fonction kf (définie par $(kf)(x) = k \times f(x)$) a le même sens de variation que f sur I.
2. Si $k < 0$, alors la fonction kf a le sens de variation contraire de celui de f sur I.
3. Si f et g sont croissantes sur I, alors la fonction $f + g$ (définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$) est croissante sur I.
4. Si f et g sont décroissantes sur I, alors la fonction $f + g$ est décroissante sur I.

Exemple Soit $fk(x) = x^2 + 3x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$. f peut être vue comme la somme de trois fonctions : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto -2$.
$f_1 : x \mapsto x^2$ est croissante $[0; +\infty[$.
$f_2 : x \mapsto 3x$ est de la forme kg avec $k = 3 > 0$ et $g(x) = x$ croissante sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto 3x$ est croissante sur $[0; +\infty[$.
$f_3 : x \mapsto -2$ est constante, donc croissante sur $[0; +\infty[$.
Comme $f = f_1 + f_2 + f_3$ et que les trois fonctions sont croissantes sur $[0; +\infty[$, f est croissante sur $[0; +\infty[$.
Remarque (Rappel) $f(x) = ax + b$, fonction affine, est croissante sur $\mathbb{R}$ si a est positif, décroissante sur $\mathbb{R}$ sinon.
→ **Exercices** 16p30 (de a à c), 17p30 (1 et 2), 18p30

B Composition de fonctions

Définition Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans J.
Soit g une fonction définie sur J à valeurs dans K.
On peut composer les fonctions f et g, et définir la fonction notée $g \circ f$ (prononcée 'g rond f'), définie par :

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

On dit que $g \circ f$ est la fonction composée de f et g.

▲ l'ordre d'application des fonctions est très important pour respecter les ensembles de définition.

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

→ **Exercices** 9p29, 12p29, 13p30 (en DM)
On peut à l'aide des fonctions composées étudier le sens de variation de certaines fonctions :
Proposition

1. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux fonctions ayant le même sens de variation respectivement sur I et J. Alors $g \circ f$ est croissante sur I.
2. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux fonctions ayant des sens de variation contraires respectivement sur I et J. Alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3x+6}$ est décroissante sur $]-2; +\infty[$. En effet elle est la composée de $f : x \mapsto 3x + 6$, définie sur $]-2; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$, et de $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x + 6) = \frac{1}{3x + 6}$$

Or f est croissante (fonction affine de coefficient directeur positif), et g est décroissante. Leurs sens de variation étant contraires, leur composée est décroissante.
→ **Exercices** 19p30 (a et b), 21p30, 20p30, 22p31

C Fonctions associées

Activité bas de la page 12

Proposition Soit $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ un repère, soit f une fonction.

1. Si g est définie par $g(x) = f(x-a)$, la représentation graphique de g s'obtient par la translation de vecteur de coordonnées $(a, 0)$ de la représentation graphique de f (attention au signe de a).
2. Si g est définie par $g(x) = f(x) + b$, la représentation graphique de g s'obtient par la translation de vecteur de coordonnées $(0, b)$ de la représentation graphique de f.
3. Si g est définie par $g(x) = -f(x)$, la représentation graphique de g s'obtient par le symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la représentation graphique de f.

→ **Exercice** 25p31, 28p31

Chapitre 2

Fonctions polynomiales

A Cas général

Définition Une fonction polynomiale (ou fonction polynôme) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire :

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel et a_0, a_1, ..., a_n sont des réels.

Définition Si a_n est non nul, l'entier n est appelé le degré de la fonction polynomiale.
Les réels a_0, a_1, ..., a_n sont appelés les coefficients de la fonction polynomiale.
l'expression $a_i x^i$ (où i est un entier naturel) est appelé monôme de degré i.

<u>**Exemple**</u> $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ est une fonction polynomiale de degré 2.
$g(x) = 0$ est la fonction polynomiale nulle.
L'écriture polynomiale d'une fonction polynomiale est unique. Autrement dit :

Proposition Deux fonction polynomiales f et g sont égales si et seulement si :
- f et g ont le même degré
- leurs coefficients sont égaux (indice par indice)

Définition Soit f une fonction polynomiale et x un réel tel que $f(x) = 0$. On dit que x est une racine de f.

→ **Exercices** 44,45,46,47p33

B Trinômes du second degré

Définition Une fonction polynomiale de degré 2 est appelée trinôme du second degré. Un trinôme du second degré est donc une fonction pouvant s'écrire sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a \neq 0$

Étudier un trinôme du second degré, c'est chercher :
- d'éventuelles racines
- son signe
- à tracer sa courbe représentative

1 Forme canonique

L'étude du signe et la recherche de racines sont liées, car on va chercher à factoriser l'expression du trinôme.

$$\begin{aligned} P(x) = ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Cette forme de l'expression de $P(x)$ est appelée la **forme canonique** de P.
On définit $\Delta = b^2 - 4ac$. On a alors :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

La réponse à notre problème dépend alors du signe de Δ, appelé le **discriminant** du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$ et le trinôme n'a pas de racine et est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et le trinôme n'a qu'une racine (dite double) : $x = -\frac{b}{2a}$.
  Le signe de P est celui de a.
- Si $\Delta > 0$, alors Δ a une racine carrée et $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$. Ainsi, $P(x)$ s'écrit sous la forme $P(x) = a[A^2 - B^2]$ que l'on peut factoriser sous la forme $P(x) = a(A - B)(A + B)$.
  Autrement dit, en identifiant A et B,

  $$P(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

  Ce qui fait que P a deux racines,

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Un tableau de signe permet de déduire le signe de P :
  P est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé de a entre les deux racines.

→ **Exercices** 50p34 (forme canonique)

Récapitulatif : racines et signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

signe de Δ	racines	signe de la fonction
$\Delta < 0$	$\emptyset$	signe de a
$\Delta = 0$	$\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$	signe de a
$\Delta > 0$	$\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	signe de a à l'extérieur des racines signe de $-a$ entre les racines

→ **Exercices** fiche recherche de racines et signe
→ **Exercice** 56p34 (produit nul, solutions à trier dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$)
→ **Exercice** 59p34 (à paramètre)
→ **Exercices** (TD) 65,67p35, 71p35, 72p35
→ **Exercices** (DM) 74,75,76p35 (changement de variable)
→ **Exercices** 82,84p36 (signe)

C Représentation d'un trinôme du second degré

Activité fiche sur les variations (en TD)

Proposition La représentation graphique d'une fonction polynomiale de degré 2 est une parabole.
Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Le **sommet** de la parabole est atteint en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (et $f(x_0)$ vaut $-\dfrac{\Delta}{4a}$).

- Si a est négatif, ce sommet est un maximum (f est croissante puis décroissante).
- Si a est positif, ce sommet est un minimum (f est décroissante puis croissante).

→ **Exercices** 93p37,96p38

Chapitre 3

Limites

Activité p128 (fonction inverse - une erreur dans la partie B)

Rappel limites finies en un réel, déterminables si la fonction est définie.

A Limite infinie en un réel

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert borné par a (donc non définie en a).
Définition Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, c'est dire que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a dans D_f. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

la limite est $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to a} -f(x) = +\infty$.

<u>**Exemple**</u> les fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Distinguer limite normale et limite par valeurs supérieures et inférieures (on dit limite à gauche et limite à droite).

Dessin

Proposition

- les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ (n entier positif) ont pour limite 0 en 0.
- les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ (n entier positif) ont pour limite $-\infty$ en 0 à gauche et $+\infty$ en 0 à droite.

<u>**Exemple**</u> La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$, non définie en 2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{0-2} = -\dfrac{1}{2}$ Pour la limite en 2, on se ramène à la fonction inverse par un changement de variable $X = x - 2$ lorsque x tend vers 2, X tend vers 0. De plus, si $x > 2$, $X > 0$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \frac{1}{X} = +\infty$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} \frac{1}{X} = -\infty$$

On ne fait pas toujours un changement de variable (qui peut être peut pratique). L'idée est avant tout de savoir que l'on a un comportement de type $\frac{1}{x}$, où x s'approche de 0 sans changer de signe.
→ **Exercices** 1p143, 10p144

B Limite finie à l'infini

Soit l un nombre réel.
Définition Dire que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$, c'est dire que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi proche de l que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ si $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut si $-x$ est suffisamment grand.

Dessin

Proposition Les fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (n entier naturel) ont pour limite 0 en $+\infty$ et, sauf $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, 0 en $-\infty$.

C Limites infinies à l'infini

Activité rapide sur x^2
Définition Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, c'est dire que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut dès que x est assez grand. On note

$$\lim_{x\to+\infty} = +\infty$$

– Pour une limite égale à $-\infty$ on applique la définition à $-f(x)$
– Pour une limite lorsque x tend vers $-\infty$, on l'appplique à $-x$.
– Il existe une dernière combinaison...

Proposition
– Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ (n entier naturel) ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
– Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^{2n+1}$ (n entier naturel) ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.
– Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^{2n}$ (n entier naturel) ont pour limite $+\infty$ en $-\infty$.

Dessin de x^2 et x^3

D Opérations sur les limites

lire et apprendre le tableau de limites de somme, produit et inverse p136.
Exemples de quelques formes indéterminées.
– $0 \times \infty$: $\frac{1}{x}x$ et $\frac{5}{x}x$ en $+\infty$.
– $+\infty - \infty$: $x - x$, $(x+3) - x$ et $2x - x$ en $+\infty$.

Lever une indéterminée dans une fonction polynomiale :

Exemple $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$ en $\pm\infty$.
On peut retenir qu'en général, le terme « le plus fort l'emporte ».

→ **Exercices** 4,5p143, 12,13p144 (limites en un réel)
→ **Exercices** 15,16p144, 17,18p145 (limites à l'infini)
→ **Exercices** 32p146, 34,36,38p147 (formes indéterminées)
→ **Exercices** 40p147 (trouver des exemples de FI) en DM voire 42p147 (nombre dérivés ou simplifiables)

E Asymptotes

Soit f une fonction.

1 Asymptotes verticales

Définition Si f est définie sur un intervalle ouvert en a et $\lim\limits_{x \to a} = \pm\infty$, on dit que la courbe de f admet une asymptote verticale en a. Cela signifie que la courbe de f s'approche de la droite d'équation $x = a$ lorsque x s'approche de a.

Dessin

2 Asymptotes horizontales

Définition Soit a un réel. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, on dit que la courbe de f admet la droite d'équation $y = a$ pour asymptote horizontale en $+\infty$. Cela signifie que la courbe de f s'approche de la droite (horizontale) d'équation $y = a$ quand x prend de grandes valeurs.

En $-\infty$, la définition est similaire.

Dessin

3 Asymptotes obliques

Dans le cas où la limite de f en l'infini est infinie, on peut parfois comparer la manière de tendre vers l'infini à l'aide d'une droite :

Définition Soit a et b des réels. Si $\lim x \to +\infty f(x) - (ax + b)$, on dit que la courbe de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique. Cela signifie que plus x est grand, plus la courbe de f est proche de celle de la droite.

En $-\infty$, la définition est similaire.

Dessin

On peut chercher à étudier la position relative de la courbe avec les asymptotes horizontales et obliques.
→ **Exercices** 19,20,22,23,24p145
→ **Exercices** 28,29p146