Chapitre 1

Barycentres

Activité p158 (Loi d'Archimède – balance romaine) Barycentre de deux points

A Barycentre de deux points

Définition

1. On appelle **point pondéré** tout couple (A, α) où A est un point de $\mathcal{E}$ et α est un nombre réel.
2. Un ensemble de points pondéré, $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)\}$ est appelé **système de** n **points pondérés**.
3. La **masse** d'un ensemble S de points pondérés est la somme $m = \alpha_1 + \alpha 2 + \cdots + \alpha_n$

Définition Soit $S = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système de masse non nulle ($\alpha + \beta \neq 0$).
On appelle **barycentre** du système S l'unique point G tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

On le note $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Proposition Soit un système de masse non nulle $S = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ de barycentre G. Alors :
– **Commutativité :** $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\} = Bar\{(B, \beta); (A, \alpha)\}$
– **Homogénéité :** Pour tout réel k non nul, $G = Bar\{(A, k \times \alpha); (B, k \times \beta)\}$

Preuve : Exercice. □

Théorème Soit $S = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système de masse non nulle, de barycentre G. Alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

De plus, le point G appartient à la droite (AB).

Preuve : Comme $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, on a donc d'après la relation Chasles :
$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
Soit en passant $\overrightarrow{GA}$ de l'autre côté, puis en divisant par $(\alpha + \beta)$ (non nul) :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Comme A est commun, on en conclue que A, B et G sont alignés. Autrement dit, $G \in (AB)$. □

Théorème Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ un système de points pondérés.
– Si $\alpha+\beta = 0$, alors S n'a pas de barycentre et pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \beta\overrightarrow{AB}$$

– Si $\alpha+\beta \neq 0$, alors S a un barycentre G et pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Preuve : Exercice. □
→ **Exercices** 29p183, 31p183, 33p183, 36p184 (généralise le 33)
→ **Exercices** 38,39,40p184 (lieux de points)

B Barycentre de 3 points

On généralise la définition donnée pour 2 points :
Définition Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système de masse non nulle ($\alpha+\beta+\gamma \neq 0$).
On appelle **barycentre** du système S l'unique point G tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

On le note $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$
Proposition Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta);(B,\gamma)\}$ un système ayant un barycentre G. Soit $m = \alpha+\beta+\gamma$ la masse du système. Alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{m}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{m}\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{m}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{m}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{m}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{m}\overrightarrow{CB}$$

Remarque La propriété précédente permet de montrer que les points A, B, C et G sont coplanaires.
Théorème Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système de points pondérés.
– Si $\alpha+\beta+\gamma = 0$, alors S n'a pas de barycentre et pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$$

– Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, alors S a un barycentre G et pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Preuve : Exercice. □

Remarque En particulier, si le système a un barycentre, on peut prendre pour M le point A. L'égalité devient alors :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$$

Ce qui permet la construction du point G·
→ **Exercices** 44p185
→ **Exercice** 45p185 en DM
Théorème (Associativité) Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système de points pondérés de masse non nulle, de barycentre G. Si $\alpha+\beta \neq 0$, en notant $K = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$, alors :

$$G = Bar\{(K,\alpha+\beta);(C\gamma)\}$$

Preuve : On a par définition de G : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. En utilisant la relation de Chasles pour introduire K dans les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ on a : $\alpha\overrightarrow{GK} + \beta\overrightarrow{GK} + \alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Or, $\alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$ par définition de K. En factorisant par $\overrightarrow{GK}$, on a : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GK} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Ce qui prouve le théorème. □

→ **Exercices** 46p185, 47p185, 48*p185 (utiliser associativité et alignement), 52p186

C Barycentre d'un nombre quelconque de points

Définition Soit $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)\}$ un système de n points pondérés de masse non nulle. On appelle barycentre de S l'unique point G tel que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

On note $G = Bar\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)\}$.

Soit $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ la masse du système. On dit que m est la masse du barycentre G.

Définition Dans le cas particulier où $\alpha_i = 1$ pour tout i (tous les coefficients valent 1), on dit que le barycentre est l'iso-barycentre.

Théorème Soit S un système de n points pondérés de masse non nulle m et de barycentre G. Le barycentre G reste inchangé si l'on remplace une partie des points pondérés de S par leur barycentre, lorsqu'il existe, affecté de la somme de leurs coefficients.

→ **Exercices** 59p187 (revue d'un exercice similaire), 62p187

Exemple Soit $S = \{(A, -1); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\}$. On a $-1 + 3 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ donc S admet un barycentre G. Puisque $-1 + 3 \neq 0$ et $1 + 1 \neq 0$n on peut définir :

$$K = Bar\{(A, -1); (B, 3)\} \qquad \text{et} \qquad L = Bar\{(C, 1); (D, 1)\}$$

On a alors

$$\begin{aligned} G &= Bar\{(A, -1); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\} \\ &= Bar\{(K, 2); (L, 2)\} \\ &= Bar\{(K, 1); (L, 1)\} \end{aligned}$$

Théorème Soit f une transformation usuelle du plan (translation, réflexion, rotation),
et soit $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)\}$ un système de points pondérés ayant un barycentre G.
Alors $f(G)$ est le barycentre du système $S = \{(f(A_1), \alpha_1); (f(A_2), \alpha_2); \ldots; (f(A_n), \alpha_n)\}$