Chapitre 1

Nombre dérivé et applications

A Limite en un réel

Activité p86

Définition Soit f une fonction et a et l des réels. On dit que f admet l pour limite en a si $f(x)$ peut être rendu aussi proche de l que l'on veut lorsque x est suffisamment proche de a. On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Exemple Quatre courbes : une "normale", une non définie en a ayant une limite, une avec limite infinie, une avec des limites différentes à gauche et à droite.

Proposition Toutes les fonctions références connues pour l'instant (et en première) ont une limite en tout réel a de leur domaine de définition, et en plus :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

→ **Exercices** 1,2,3 (4) p105

Proposition Les limites qui existent peuvent s'ajouter, se multiplier, se diviser (sauf 0).

→ **Exercice** 6p105

Proposition Soit f et g deux fonctions et a un réel contenu dans un intervalle I. On suppose que :
– g est définie sur I et que f est définie sur I sauf en a.
– pour tout $x \in I$, $x \neq a$, $f(x) = g(x)\cdot$
– g admet une limite en a qui vaut $g(a)$.
Alors f admet une limite en a qui vaut $g(a)$.

Exemple $g(x) = x - 2$ et $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)}$. On a $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

→ **Exercice** 7p105

→ **Exercices** 9, (10 en DM), 12p106 (11 est erroné)

B Nombre dérivé

Activité p87 (vitesse moyenne, vitesse instantanée par calcul et graphiquement)

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant un réel a. On dit que f est dérivable en a si l'expression :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet une limite finie l lorsque h tend vers 0. On appelle **nombre dérivé de f en a** cette limite l. On la note $f'(a)$.
On a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a) \text{ ou } \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

(en effet, on pose $x=a+h$)
Géométriquement, le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est la pente de la droite passant par $(a;f(a))$ et $(a+h;f(a+h))$. La limite est la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe de f en $x=a$.

Exemple Dessin représentant les pentes, M s'approchant du point $A(a;f(a))$.

Exemple soit $f(x)=2x^2+5x-2$. et $a=1$. Alors

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2(1+h)^2+5(1+h)-2-(2(1)^2+5(1)-2)}{h}=\frac{2h^2+4h+5h}{h}=2h+9$$

Cette expression a pour limite 9 quand h tend vers 0. Donc $f'(1)=9$

Exemple En général on s'intéresse plus au nombre dérivé d'une fonction en un point x_0 quelconque. En reprenant la fonction f précédente, on exprime alors :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2(x_0+h)^2+5(x_0+h)-2-(2x_0^2+5x_0-2)}{h}=\frac{2x_0^2+4x_0h+5h}{h}=2h+4x_0+5$$

Cette expression a pour limite $4x_0+5$ quand h tend vers 0. Donc $f'(x_0)=4x_0+5$
→ **Exercices** 16p106 (détermination graphique)
→ **Exercices** 13,14p106 (sauf questions 3) (nombre dérivé de fonctions affines et trinômes du second degré)

Proposition Soit f une fonction admettant un nombre dérivé en a. Alors la tangente à la courbe de f en a a pour équation :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Preuve : Notons $y=\alpha x+\beta$ l'équation de la droite. La pente de la tangente vaut $f'(a)$ comme remarqué précédemment, donc $\alpha=f'(a)$. Or la droite, tangente à la courbe de f, passe par le point de coordonnées $(a;f(a))$. Ainsi, $f(a)=f'(a)a+\beta$. Donc $\beta=f(a)-f'(a)a$ et l'équation de la droite est alors :

$$y=f'(a)x+f(a)-f'(a)a=f'(a)(x-a)+f(a)$$

□

→ **Exercices** 17p106

Proposition (Approximation affine) Soit f une fonction dérivable en a. Alors les valeurs prises par $f(x)$ sont proches, autour de a, des valeurs prises par l'expression de sa tangente en a. Autrement dit :

$$f(x)\simeq f'(a)(x-a)+f(a) \text{ pour } x \text{ proche de } a$$

ou

$$f(a+h)\simeq f'(a)h+f(a) \text{ pour } h \text{ proche de } 0$$

On appelle cette approximation **l'approximation affine de f au voisinage de** 2
→ **Exercices** 28p108, 27p108

C Fonction dérivée

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout réel de I, on dit que f est dérivable sur I et on définie une nouvelle fonction, la dérivée de f sur I, notée f', par :

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

. où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

Exemple La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout x_0 de $\mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 2ax_0 + b$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée f' est définie par $f'(x) = 2ax + b$.

Proposition Voici donnée dans le tableau ci-dessous les dérivées de fonctions référence :

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; \infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^\star$

Preuve : Faire la preuve pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$, les autres ayant été vues ou étant admises (x^n). □

Proposition (Opération sur les fonctions et dérivées) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.
- $(u + v)$ est dérivable et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Cas particulier, si $v(x) = k$ (v est constante égale à k, $k \in \mathbb{R}$), $(ku)' = ku'$.
- $\dfrac{u}{v}$ est dérivable pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Cas particulier, si $u(x) = 1$, on a $u'(x) = 0$ et donc $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.

Preuve : Faire celle de $u + v$. □

Exemple On souhaite dériver la fonction $f(x) = (3x + 5)\sqrt{x}$. f peut être vue comme un produit : $f = uv$ avec $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$ La fonction racine carrée v est dérivable sur $]0; infty[$ ainsi que la fonction affine u. Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f' = u'v + uv'$. On a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc

$$f'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (3x + 5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

→ **Exercices** 32,33,34,36,38p109 (sauf fonctions trigonométriques)

Proposition (Composition par une fonction affine) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, soit a et b des réels. La fonction $f : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable en tout point x tel que $ax + b \in I$ et

$$f'(x) = a \times u'(ax + b)$$

Preuve : Admis. □

Exemple Soit $f(x) = \sqrt{2x + 5}$. $f(x) = u(2x+5)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$, dérivable en tout $x > 0$. f est dérivable en tout x tel que $2x + 5 > 0$ (i.e. : $x > \dfrac{-5}{2}$), et $f'(x) = 2\dfrac{1}{2\sqrt{2x + 5}}$.

→ **Exercice** 41p109

D Signe de f' et variation de f

D'après les observations graphiques du nombre dérivé, on peut donner :

Proposition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f est croissante sur I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- Si f est décroissante sur I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
- Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

L'intérêt principal du calcul de la dérivée est le théorème suivant (admis) :

Théorème Soit f une fonction dérivable sur une intervalle I.
- Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante.
- Si $f'(x)$ est strictement positive sauf éventuellement en quelques points isolés où elle s'annule, alors f est croissante.
- Si $f'(x)$ est strictement négative sauf éventuellement en quelques points isolés où elle s'annule, alors f est décroissante.

Exemple Soit $f(x) = x^2 - 3x + 3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 3$. $f'(x)$ s'annule pour $x = \frac{3}{2}$. On peut alors donner le tableau de variation de f.

Remarque On retrouve les variations des fonctions polynomiales de degré 2 : l'extremum de la fonction en exemple est bien obtenu en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$.

→ **Exercices** 67
→ **Exercice** 70p114, 71p114 (DM, similaire à 70)
→ **Exercice** voir bas de la page 95 (variations puis encadrement)
→ **Exercices** 52,53p111
→ **Exercice** 58p112 (difficile ?)

Définition (Extremum local) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local M en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que $M = f(x_0)$ soit le maximum (resp. minimum) de f sur J.
On appelle extremum local un minimum ou un maximum local.

Exemple Dessin

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0

Exemple et contre-exemple (x^3).