Chapitre 1

Produit scalaire

A Définition géométrique

1 Vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Pour définir le produit scalaire de deux vecteurs, il nous faut considérer trois points permettant de représenter ces deux vecteurs avec la même origine.
Soit donc O, A et B trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Définition Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, Alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini par :
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OB$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.

Exemple figure

Remarque $\vec{u} = \cdot \vec{u} = OA \times OA = OA^2$
D'autre part, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
→ **Exercices** 1,2 (première partie) p207

2 Vecteurs quelconques

Pour définir le produit scalaire de deux vecteurs non colinéraires, on doit se ramener à des vecteurs colinéraires. Pour cela on définit le projeté orthogonal sur une droite :

Définition (Projeté orthogonal) Le projeté d'un point B sur une droite $\mathcal{D}$ est le point H de $\mathcal{D}$ tel que $(BH) \perp \mathcal{D}$.

Exemple Dessin

Remarque si $B \in \mathcal{D}$, alors $H = B$.

Définition Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs quelconques. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

Exemple dessin

Proposition Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

→ **Exercices** 2 (seconde partie), 3 p207
→ **Exercices** 4 (sauf d), 5p207

B Propriétés

Théorème Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs quelconques. Alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$$

Preuve :(cas où $H \in [OA]$) Dans le triangle rectangle OHB, $\cos(\widehat{HOB}) = \dfrac{OH}{OB}$.
Donc $OH = OB\cos(\widehat{HOB})$. Or par définition, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = OA \times OH$. Donc, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = OA \times OB\cos(\widehat{HOB})$. Or $\|\overrightarrow{u}\| = OA$ et $\|\overrightarrow{v}\| = OB$. De plus, $\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \cos(\widehat{AOB}) = \cos(\widehat{HOB})$. D'où le résultat. Dans le cas où $H \notin [OA]$, on remarque que

$$\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \cos(\widehat{AOB}) = \cos(\pi - \widehat{HOB}) = -\cos(\widehat{HOB})$$

Mais $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = OA \times (-OH)$ (vecteurs de sens contraires). On termine alors la preuve. □

→ **Exercices** 9,11,12 p209

Proposition Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs et k un réel.
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (on dit que le produit scalaire est symétrique)
- $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

En définissant $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ (et en remarquant que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}^2$), on a les propriétés suivantes :

Proposition On a les identités remarquables suivantes :
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

→ **Exercices** 15p208, 16p208 (voir page 203), 17p208, 21p209
→ **Exercices** 23,24,25,... p209

C Expression analytique du produit scalaire

Soit $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan.

Proposition Soit $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan. Alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Preuve : Par définition, $\overrightarrow{u}$ =) et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$. Alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}) = ... = xx' + yy'$$

car $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux et de norme 1. □

Conséquences : la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est $\sqrt{x^2 + y^2}$ (car $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$).
Et la distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Théorème les vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

→ **Exercices** 32,33p209, 35p210

D Droites et cercles

1 Droites

Définition On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à une droite $\mathscr{D}$ si c'est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Proposition Soit A un point du plan et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ est la droite passant par A qui admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal.

Preuve : Un point M sur la droite passant par A qui admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal vérifie bien que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ par définition. Si $\overrightarrow{AM} \cdot n = 0$, alors le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à la droite (AM) par définition. Donc M appartient bien à la droite passant par A et qui admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal. □

Proposition Soit $\overrightarrow{n}(a; b)$ un vecteur non nul. Une droite admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal si et seulement si elle a une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

Preuve : Soit $A(x_A, y_A)$ un point de la droite qui admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal. Alors tout point $M(x; y)$ de la droite vérifie $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. En développant, on obtient une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

. Réciproquement, comme $\overrightarrow{n}$ est non nul, supposons que $a \neq 0$. Alors le point $A(-\frac{c}{a}; 0)$ satisfait l'équation. Soit $M(x; y)$ un point du plan. Alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = ax + by + c$. Ainsi, les points vérifiant l'équation sont les points tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Il s'agit donc de la droite passant par A qui admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal.
□

→ **Exercices** 50,51p211, 54,56p212

2 Cercles

Proposition Dans un repère orthonormé, le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Preuve : Soit $M(x; y)$ un point du cercle. On a $\Omega M^2 = R^2$, d'où l'équation.

Proposition Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Preuve : Le cerle est l'ensemble des points M tels que AMB est rectangle en M, ou $M = A$ ou $M = B$.
→ **Exercices** 60,61p212 (donner la méthode pour forme canonique), 66p213

E Autres applications du produit scalaire

1 Relations dans le triangle

Théorème (de la moyenne) Soit A et B deux points et I le milieu de $[AB]$. Pour tout pout M du plan,

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
MA^2+MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2\\
&= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2\\
&= MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+IA^2+MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+IB^2\\
&= 2MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+2IA^2 \quad (IA=IB)\\
&= 2MI^2+0+\frac{AB^2}{2} \quad (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \text{ et } AB=2IA)
\end{aligned}$$

Dessin d'un triangle avec les notations usuelles longueurs et angles

Proposition (Relation d'Al-Kashi)

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A} \quad ; \quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B} \quad ; \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$$

Preuve : Nous l'avons déjà prouvé, mais voici un rappel : Puisque $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 &\Leftrightarrow a^2=BA^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2\\
&\Leftrightarrow a^2=c^2+2BA\times AC\times\cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC})+b^2\\
&\Leftrightarrow a^2=c^2-2cb\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})+b^2\\
&\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-2cb\cos\widehat{A}
\end{aligned}$$

Proposition (Formule des sinus)

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

Preuve : Par rotation des notations, il suffit de montrer une seule égalité, et avec le produit en croix il suffit de montrer que

$$a\sin\widehat{B}=b\sin\widehat{A}$$

Soit x la longueur de la hauteur de ABC issue de C. Alors $\sin\widehat{B}=\dfrac{x}{a}$ et $\sin\widehat{A}=\dfrac{x}{b}$ (figure!). D'où $x=a\sin\widehat{B}=b\sin\widehat{A}$.
(vrai aussi quand la hauteur sort du triangle car $\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$). □

Proposition (Formule des aires) Soit $\mathcal{S}$ l'aire de ABC. Alors :

$$\mathcal{S}=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Preuve : D'après la propriété précédente, la hauteur issue de C mesure $a\sin\widehat{B}=b\sin\widehat{A}$. La base associée est le côté de longueur c. On a donc $\mathcal{S}=\dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$. Et de manière similaire pour la dernière égalité en changeant les lettres. □

Remarque on a alors $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}}=\dfrac{b}{\sin\widehat{B}}=\dfrac{c}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{abc}{2\mathcal{S}}$

→ **Exercice** voir p201
→ **Exercices** 73p214, 80,81p214 (médiane, sinus, médiane)
→ **Exercices** 92,94p215 (sinus)

2 Trigonométrie

Proposition (Formules d'addition)

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Preuve :L'idée est de calculer un produit scalaire de deux manières différentes, l'une avec les coordonnées, l'autre géométriquement. Soit $\overrightarrow{u}(\cos b; \sin b)$ et $\overrightarrow{v}(\cos a; \sin a)$. Les deux vecteurs sont de norme 1 et $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = a - b$ (dessin !). Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$. En changeant b par $-b$, du fait que $\sin(-b) = -\sin b$, on obtient $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ Pour les autres égalités, on utilise aussi le fait que $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$. □

Proposition (Formules de duplication)

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Preuve : Simple application des formules d'addition et de $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. □

Proposition (Formules de linéarisation)

$$\cos^2 a = \frac{1 + 2\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - 2\cos 2a}{2}$$

Preuve : Simple application des égalités de la première formule de duplication. □

→ **Exercice** voir p201

→ **Exercices** 97,98,99,102,105,106p216