

Chapitre 1

Suites

A Définitions

Activité p222 (suite de Fibonacci générée de deux manières)

Définition Une suite u de nombres réels est une fonction associant à tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier n_0 donné, un nombre réel $u(n)$, noté u_n .

On dit que u_n est le terme d'indice n de la suite.

On peut noter la suite u sous la forme $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Remarque Le plus souvent, $n_0 = 0$. On note alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Parfois $n_0 = 1$.

Remarque Si $n_0 = 1$, le premier terme de la suite est u_0 , le second u_1 , etc...

Il ne faut donc pas confondre le **rang** et l'**indice**.

Exemple

– La suite u définie par $u_n = \sqrt{n-2}$ est définie pour tout $n \geq 2$. On la note $(u_n)_{n \geq 2}$.

– La suite v définie par $v_n = 2n^2 + 3n - 5$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On la note $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

B Deux manières de définir

Définition Une suite u est définie de façon **explicite** lorsque le terme général u_n est exprimé en fonction de n ($u_n = f(n)$)

Exemple la suite u définie par $u_n = 4n - 7$ est définie explicitement. Ici, $f(x) = 4x - 7$.

On représente une telle suite en plaçant les points $(n; f(n))$ dans un repère.

Définition Une suite u est définie **par récurrence** lorsqu'un terme de la suite est définie en fonction du précédent. Plus précisément :

$$\begin{cases} u_{n_0}, & \text{le premier terme, est donné} \\ u_{n+1} = & f(u_n) \text{ pour tout } n \geq n_0, \text{ où } f \text{ est une fonction} \end{cases}$$

Exemple Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 4$. La fonction f associée à la suite est définie par $f(x) = x^2 - 4$.

On représente une telle suite par une « toile d'araignée ». (Voir p227)

→ **Exercices** 1,2p240 (calcul de valeurs, utilisation de la calculatrice)

→ **Exercices** 16,17,19p241 (travail sur les indices)

C Variations et bornes

Définition Soit u une suite définie pour $n \geq n_0$.

- u est croissante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$. Si $u_{n+1} > u_n$, elle est strictement croissante.
- u est décroissante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$. Si $u_{n+1} < u_n$, elle est strictement décroissante.
- u est constante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- u est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Pour déterminer les variations d'une suite définie explicitement, on peut étudier la fonction.

Exemple Si $u_n = \frac{1}{n}$ ($n \geq 0$), comme la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante, u est décroissante.

Dans le cas général, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple Si $u_{n+1} = u_n + 7$, on a $u_{n+1} - u_n = 7 > 0$, donc la suite est strictement croissante.

Définition Soit u une suite définie pour $n \geq n_0$.

- u est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.
- u est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0$, $m \leq u_n$.
- u est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple la suite u définie par $u_n = \sqrt{n+4}$ est minorée par 2 car pour tout $n \geq 0$, $\sqrt{n+4} \geq \sqrt{4} = 2$ (la fonction racine carrée est croissante).

→ **Exercices** 4,5,6p240 (représentation et conjectures)

→ **Exercices** 10,11p240, 12,13p241 (variation)

D Suites remarquables

1 Suites arithmétiques

Définition Soit n_0 un entier naturel, r un réel et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. Si, quelque soit $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n = r$, on dit que u est une suite arithmétique de raison r .

Remarque Cette définition donne une relation de récurrence pour la suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque $\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} = \frac{r + u_n - r + u_n}{2} = u_n$: u_n est la moyenne **arithmétique** de u_{n-1} et u_{n+1} .

Exemple La suite u définie par $u_n = 5n + 3$ pour tout $n \geq 0$ est arithmétique de raison 5. En effet, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 3 - (5n + 3) = 5n + 5 + 3 - 5n - 3 = 5$.

Plus généralement :

Toute suite de la forme $u_n = r \times n + a$, avec r et a des nombres réels, est arithmétique de raison r .

La réciproque est vraie :

Théorème Soit r un nombre réel et soit u une suite arithmétique de raison r , définie pour $n \geq 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r \times n + u_0$. Plus généralement si $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geq p$:

$$u_n = r \times (n - p) + u_p$$

(utile si la suite est définie pour $n \geq p$)

Preuve : Admis □

Remarque Ce théorème donne une définition explicite des suites arithmétiques.

Proposition Selon la valeur de r , on peut déterminer la variation d'une suite arithmétique de raison r .

1. Si $r < 0$, alors la suite est décroissante ;
2. Si $r = 0$, alors la suite est constante ;
3. Si $r > 0$, alors la suite est croissante.

Preuve : Évident d'après la définition. □

Proposition Soit u une suite arithmétique de raison r définie pour $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Alors

$$S_n = (n + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

Preuve : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 + (r + u_0) + \dots + (nr + u_0) = (n + 1)u_0 + r(1 + \dots + n)$.

Or, $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ car $(1 + \dots + n) + (n + \dots + 1) = n(n + 1)$.

Donc $S_n = (n + 1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)2u_0}{2} + r \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr) = \frac{n+1}{2}(u_0 + nr + u_0)$.

Comme $u_n = nr + u_0$, on trouve bien le résultat souhaité. □

→ **Exercices** 24,25,26p241, 27,28p242 (base)

→ **Exercices** 22,23p241 (moins faciles)

→ **Exercices** 30,31p242

→ **Exercices** 32,33,35p242 (sommés)

→ **Exercices** 38,39p242 (en DM)

→ **Exercices** 40,41p243 (partir de suites non arithmétiques)

2 Suites géométriques

Définition Soit n_0 un entier naturel, q un nombre réel et $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite. Si quel que soit $n \geq n_0$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$, on dit que v est une suite géométrique de raison q .

Remarque On définit une suite géométrique par récurrence, puisque $v_{n+1} = q \times v_n$.

Exemple Soit $v_n = 2 \times 3^n$ ($n \geq 0$). Alors v est une suite géométrique de raison 3. En effet, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3$.

De manière générale, toute suite de la forme $v_n = b \times q^n$ (b et q réels) est une suite géométrique de raison q . La réciproque est vraie :

Théorème Soit q un réel non nul et v une suite géométrique de raison q . Alors quelque soit $n \geq 0$, $v_n = v_0 \times q^n$.

De plus, si $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geq p$,

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Proposition En fonction de q ($q > 0$), on peut déterminer les variations de la suite géométrique v de raison q :

- Si $q > 1$, alors v est croissante si $v_0 > 0$, décroissante sinon.
- Si $0 < q < 1$, alors v est décroissante si $v_0 > 0$, croissante sinon.

Preuve : On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n = v_0 q^{n+1} - v_0 q^n = v_0 q^n (q - 1)$.

Dans tous les cas, $q > 0$. le signe de $v_{n+1} - v_n$, ne dépend alors que du signe de v_0 et de $q - 1$. Il y a donc quatre cas possibles, qui donnent les variations affirmées par la propriété. \square

Proposition Soit v une suite géométrique de raison q définie pour $n \geq 0$. Soit, pour tout $n \geq 0$, $S_n = v_0 + \dots + v_n$. Alors, si $q = 1$, $S_n = (n + 1)v_0$ et si $q \neq 1$,

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve : Si $q = 1$, alors $S_n = v_0 + \dots + v_0 \times q^n = v_0 + \dots + v_0 \times 1^n = v_0 + \dots + v_0 = (n + 1)v_0$.

Si $q \neq 1$, $S_n = v_0 + v_0 \times q + \dots + v_0 \times q^n = v_0 \times (1 + q + \dots + q^n)$.

Or, $(1 + q + \dots + q^n) - q(1 + q + \dots + q^n) = 1 - q^{n+1}$, donc $(1 + q + \dots + q^n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

D'où le résultat. \square

→ **Exercices** 49,50,51p244 (base)

→ **Exercices** 44,45,46p243 (plus difficiles)

→ **Exercice** 47p243 (roi de Perse avec l'échiquier, en DM)

→ **Exercices** 55,56,57p244 (somme)

→ **Exercices** 62,63p245 (hausses de pourcentages constants)

E Limites et convergence

Activité Conjecturer l'existence et la valeur des limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \quad (2n^2 - 1)_{n \in \mathbb{N}} \quad \left(\frac{n}{n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \left(\cos \frac{3}{n}\right)_{n \geq 1} \quad \left(\frac{2n + 1}{n - 5}\right)_{n \geq 6}$$

$$(2^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\sin n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \left(\frac{1}{3^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\cos((2n + 1)\pi))_{n \in \mathbb{N}}$$

Le but de cette partie est de donner une définition précise concernant les limites d'une suite (nécessairement lorsque n tend vers $+\infty$).

1 Définitions

Définition (Limites finies) Soit l un réel. On dit qu'une suite u converge vers l si pour tout intervalle ouvert $]a; b[$ contenant l , il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.

Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]a; b[$.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Dessin

Cela signifie que les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de l à partir d'un certain rang n_0 pourvu que n_0 soit assez grand.

Définition Si une suite a une limite réelle (finie), on dit que la suite converge.

Dans le cas contraire, on dit que la suite diverge.

Proposition Si une suite converge vers un réel l , alors l est la seule limite de la suite.

Preuve : Soit l' un réel différent de l . on considère $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{3}$ les intervalles $]l' - \varepsilon; l' + \varepsilon[$ et $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ sont disjoints (dessin).

Comme u converge vers l , il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \notin]l' - \varepsilon; l' + \varepsilon[$.

La suite u ne converge donc pas vers l' . □

Proposition Limites de suites de référence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*$$

Définition (Limites infinies) On dit que la suite u a pour limite $+\infty$ si pour tout réel A , il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A$.

On dit que la suite u a pour limite $-\infty$ si pour tout réel A , il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq A$.

Dessin

Remarque Une suite qui a une limite infinie est une suite divergente. Un autre cas de suite divergente est celui où la suite n'a pas de limite.

Proposition Limites de suites de référence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*$$

→ Exercices 1,2p278

2 Opérations sur les limites

La plupart du temps on évite en fait d'utiliser la définition pour démontrer qu'une suite a une limite donnée. On utilise les règles de calcul déjà vues pour les fonctions.

Voir page 264

Les méthodes sont le plus souvent les mêmes que pour les fonctions (si ce n'est que la variable est un entier).

→ Exercices 5,6,8p279

3 Comparaisons de suites

Théorème (des gendarmes) Soit u , v et w trois suites. On suppose :

- qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$;
- que u et w convergent vers le même réel l .

Alors la suite v converge vers l .

Preuve : Elle utilise la définition donnée à la section précédente. □

Le nom de ce théorème provient du fait que l'on encadre une suite par deux entités qui la mènent d'autorité à un endroit bien déterminé.

Une conséquence de ce théorème est :

Proposition Soit u et v deux suites. On suppose :

- qu'à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Alors la suite u converge vers l

Preuve : cela vient du fait que $|u_n - l| \leq v_n \Leftrightarrow l - v_n \leq u_n \leq l + v_n$. □

→ Exercices 12,13p278

Proposition Soit u et v deux suites. On suppose :

- qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Proposition Soit u et v deux suites. On suppose :

- qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Proposition Soit u et v deux suites. On suppose :

- qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$.

Alors $l \leq l'$.

→ Exercices 16p279,21p280

4 limites de suites arithmétiques et géométriques

Théorème Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;
- Si $r = 0$, alors la suite est constante et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$;
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 .

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;
- Si $q = 1$, alors la suite est constante et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$;
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$;
- Si $q \leq -1$, alors u diverge (sans avoir de limite).

→ **Exercices** 11,14,17p279, 29p282

→ **Approfondissement** 38,41p285