

Devoir maison n°07
Correction (suite)

Exercice 1

2. $g(x) = \ln(2x - 3) + \frac{2x + 3}{x^2 + 2}$.

- La fonction $x \mapsto \ln(2x - 3)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 2x - 3$.

Donc la dérivée est $\frac{u'}{u}$, ce qui donne $\frac{2}{2x - 3}$.

- La fonction $x \mapsto \frac{2x + 3}{x^2 + 2}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x + 3 \\ v(x) = x^2 + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Alors la dérivée est donnée par

$$\left(\frac{u'v - uv'}{v^2} \right) (x) = \frac{2(x^2 + 2) - (2x + 3) \times 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 4}{(x^2 + 2)^2}$$

Finalement,

$$g'(x) = \frac{2}{2x - 3} + \frac{-2x^2 - 6x + 4}{(x^2 + 2)^2}$$

3. $h(x) = \ln(x)\sqrt{5x - 3}$

$h(x)$ est définie si $x > 0$ et $5x - 3 \geq 0$, soit $x > 0$ et $x \geq \frac{3}{5}$. Autrement dit, $\mathcal{D}_h = \left] \frac{3}{5}; +\infty \right[$.

- $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} \ln(x) = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} \sqrt{5x - 3} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} h(x) = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x - 3} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

- h est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \sqrt{5x - 3}$. D'abord, $u'(x) = \frac{1}{x}$. Ensuite,

v est de la forme $\sqrt{w}$ avec $w(x) = 5x - 3$. Alors $v' = (\sqrt{w})' = \frac{w'}{2\sqrt{w}}$, soit $v'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x - 3}}$

Alors $h' = u'v + uv'$, soit

$$h'(x) = \frac{\sqrt{5x - 3}}{x} + \frac{5 \ln(x)}{2\sqrt{5x - 3}} = \frac{2(5x - 3) + 5x \ln(x)}{2x\sqrt{5x - 3}}$$

Exercice 2

1. $k(x) = \ln(3x - 2)$. k est définie si $3x - 2 > 0$, donc si $x > \frac{2}{3}$. Ainsi, $\mathcal{D}_k = \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.

La fonction k est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 3x - 2$.

La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur $3 > 0$. Donc u est une fonction croissante sur $\mathcal{D}_k$. Comme la fonction logarithme est croissante, on obtient par composition que k est croissante sur $\mathcal{D}_k$. De plus, $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$. Donc :

x	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$k(x)$	$-\infty$	$+\infty$