

Devoir maison n°11
Donné le 18/04/2011 – à rendre le 09/05/2011

PARTIE A

L'objet de cet exercice est l'étude de deux fonctions intervenant dans un modèle économique. La courbe (\mathcal{C}_f) donnée en **ANNEXE (à rendre avec la copie)** est la représentation graphique, dans un repère orthogonal du plan, de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par :

$$f(x) = e^{-0,7x+2,1}$$

De même, la courbe (\mathcal{C}_g) est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par :

$$g(x) = 0,5x + 0,7$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $[0; 5]$.

1. On appelle h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - (a) Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0; 5]$.
 - (b) étudier le signe de $h'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0; 5]$. En déduire que la fonction h est strictement monotone sur cet intervalle.
 - (c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0; 5]$ et donner à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-3} près (on ne demande pas de justification sur la méthode d'obtention de cette valeur).
 - (d) Déduire de l'étude précédente les valeurs arrondies à 10^{-2} des coordonnées du point d'intersection F de (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) .

2. Dans la suite du problème, on prendra $\alpha = 2,17$ et $f(\alpha) = g(\alpha) = 1,79$.
 - (a) Soient les points C(0 ; $f(\alpha)$) et E(α ; 0). Donner une valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire du rectangle OCFE exprimée en unités d'aire.
 - (b) Interpréter graphiquement le nombre $\int_0^\alpha f(x) dx$.
 - (c) Calculer $\int_0^\alpha f(x) dx$ en fonction de α et en donner la valeur arrondie à 10^{-2} .

PARTIE B

La fonction f définie dans la **PARTIE A** représente la fonction de demande d'un produit ; elle met en correspondance le prix $f(x)$ exprimé en milliers d'euros et la quantité x , exprimée en tonnes, que sont prêts à acheter les consommateurs à ce prix.

La fonction g définie dans la **PARTIE A** est la fonction d'offre de ce produit ; elle met en correspondance le prix $g(x)$ exprimé en milliers d'euros et la quantité x , exprimée en tonnes, que sont prêts à vendre à ce prix les producteurs.

On appelle prix d'équilibre du marché le prix pour lequel la quantité demandée par les consommateurs est égale à celle offerte par les producteurs. On note p_0 le prix d'équilibre et q_0 la quantité échangée sur le marché à ce prix. Dans la situation étudiée on a donc : $f(q_0) = g(q_0)$.

1. Dédire des résultats donnés dans la **PARTIE A** les valeurs de q_0 et de p_0 .
2. Tous les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher (au-dessus du prix p_0) réalisent une économie. Le montant économisé par les consommateurs, appelé surplus des consommateurs, vaut par définition $\int_0^{q_0} f(x) dx - p_0 \times q_0$. Il s'exprime ici en milliers d'euros.
 - (a) Sur le graphique de la feuille **ANNEXE (à rendre avec la copie)** :
 - indiquer les valeurs q_0 et p_0 sur les axes de coordonnées ;
 - hachurer le domaine dont l'aire s'écrit :

$$\int_0^{q_0} f(x) dx - p_0 \times q_0$$

- (b) Calculer, en milliers d'euros, le surplus des consommateurs.

