

Devoir surveillé n°01 – mathématiques
04/10/2010

Exercice 1(5 points) Une fonction f vérifie l'inégalité suivante sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{2x^3 - 2x - 1}{x^3} \leq f(x) \leq 2 + \frac{5}{x^2}$$

Étudier l'existence éventuelle de limites pour $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 2(8 points) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}$.

- Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.
- On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
- On admet que $f'(x) \geq 0$ équivaut à $x \in [1; +\infty[$.
 - Après avoir déterminé les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, donner le tableau complet des variations de f .
 - Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α .
Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 3(7 points) La courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie sur $[0; +\infty[$. On sait que :

- $f(0) = 0$ et $f(2) = 0$;
- La courbe (C) admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$.

Toutes les réponses devront être justifiées.

- Quelle est la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?
- La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à la courbe (C) ?
- Une des trois courbes ci-contre est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 - Pourquoi g est bien définie sur $]2; +\infty[$?
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$
 - Laquelle de ces trois courbes est la courbe représentative de la fonction g ?

