

Devoir surveillé n°03 – mathématiques
06/12/2010

Exercice 1(9 points) Les deux questions sont indépendantes.

- Soit A et B deux événements indépendants. On suppose que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{10}$.
Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.
- On considère ci-dessous la loi de probabilité des gains d'un jeu :

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,4	0,3		0,1

- Déterminer la valeur manquante dans le tableau.
- Calculer l'espérance de la loi. Le jeu est-il équitable ?
- Calculer l'écart-type.
- Un joueur joue trois fois de suite à ce jeu. Quelle est la probabilité qu'il perde au moins une fois de l'argent ? On détaillera le raisonnement.

Exercice 2(8 points) Soit f la fonction définie par $f(x) = -(\ln(x))^2 + \ln(x) + 2$.

- Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Résoudre l'équation $-X^2 + X + 2 = 0$.
 - Que vaut $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$? Justifier la réponse.
 - À l'aide des questions précédentes, résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Donner une interprétation graphique des solutions.
- Exprimer $f(\sqrt{e})$ sous la forme d'une fraction de nombres entiers en détaillant les calculs.
- On admet que $f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x}$.
Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire les variations de f .

Exercice 3(3 points) (Non spécialistes)

- Faire le calcul de la dérivée $f'(x)$ de la fonction de l'exercice précédent.
- Dérivée la fonction f' . Autrement dit, calculer la dérivée seconde de f , notée f'' .

Exercice 4(3 points) (Spécialité)

On suppose ici connu que pour tous réels a et b strictement positifs on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
Soit $a > 0$. Prouver par récurrence la propriété du cours :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \geq 1, \ln(a^n) = n \ln(a)$$