Devoir surveillé n°04 – mathématiques
19/01/2011
Durée : 3 heures

**Exercice 1(5 points) Commun à tous les candidats**
Cet exercice est composé de deux parties :
- la partie I est un « vrai-faux » sans justification,
- la partie II est un questionnaire à choix multiples avec justification.

**PARTIE I :** Pour chacune des affirmations, **recopier sur la copie le numéro de la question et indiquer sans justifier** si elle est vraie ou fausse.

*Une réponse exacte rapporte* $0,5$ *point, une réponse fausse enlève* $0,25$ *point. L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.*

| |
|---|
| **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3}{x-4} = +\infty$ |
| **2.** Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.<br>On note $C$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.<br>La tangente à la courbe $C$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -6x+9$. |
| **3.** Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+5\right)$.<br>Le nombre dérivé de la fonction $f$ en 1 est $\dfrac{1}{3}$. |
| **4.** Soit $f$ la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$.<br>On définit la fonction $g$ par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$.<br>On affirme que la fonction $g$ est définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$. |

**PARTIE II :** Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte.
**Indiquer sur la copie le numéro** de la question **et la réponse choisie correspondante** puis **justifier cette réponse**.
*Chaque réponse exacte et justifiée rapportera* 1 *point.*
*Toute trace de recherche. même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** Si pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\ln x}$, alors la limite en $+\infty$ de $f(x)$ est : | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| **2.** $\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}{\ln 16}$ est égal à : | $2\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)$ | $\dfrac{1}{2\ln 2}$ | $2\ln\mathrm{e} - \ln\ 16$ |
| **3.** Le nombre de solutions de l'équation :<br>$\ln(5x^2-25) = \ln(-5x+5)$ est égale à : | $0$ | $1$ | $2$ |

**Exercice 2(4 points) Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**
Partie A

On considère la fonction $g$ définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{2}.$$

1. Étudier les variations de $g$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

Partie B

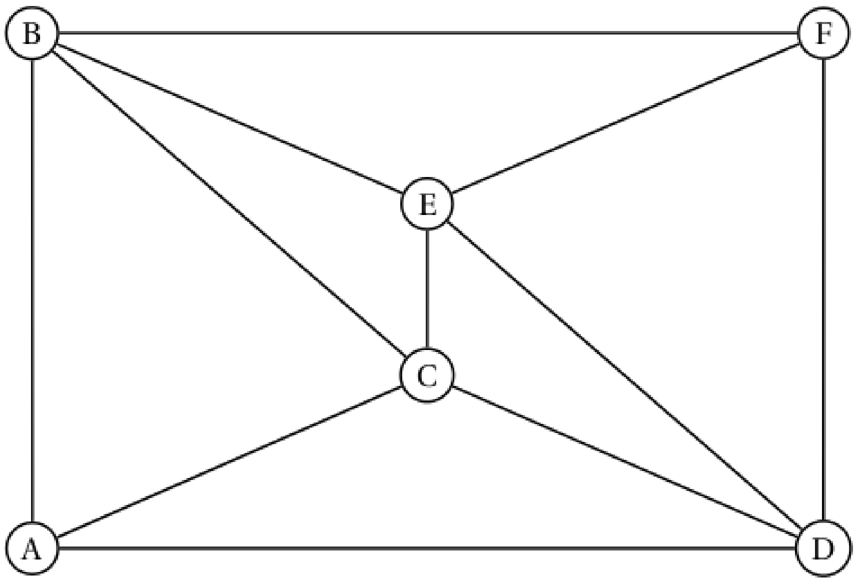
On considère la fonction $f$ définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2.$$

1. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de $f$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer que, dans l'intervalle $[2\,;\,3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$.

**Exercice 2(4 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère le graphe G suivant :




1. Le graphe G est-il connexe ? Expliquer la réponse.
2. Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
3. Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe G. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
4. Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe G. Justifier la réponse.
5. Déterminer alors ce nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche.
6. Déterminer la matrice $M$ associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).
7. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 16 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.
   Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.

**Exercice 3(7 points) Commun à tous les candidats**

**PARTIE I : ÉTUDE D'UNE FONCTION**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ telle que pour tout réel $x$ de cet intervalle :

$$f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
2. (a) Déterminer le signe de l'expression $5(1 - X)(X - 2)$ suivant les valeurs du réel $X$.

   (b) En déduire que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

3. (a) On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

   Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{5(3 - 2\ln x)}{x}$ pour tout $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (b) En déduire les variations de $f$. On précisera la valeur exacte du maximum de $f$ et la valeur exacte de $x$ pour laquelle il est atteint.
4. Calculer les limites de la fonction $f$ en 0 et en $+\infty$.
5. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ puis donner une valeur approchée arrondie à $0,01$ près de ces solutions.

**PARTIE II : APPLICATION**

Une entreprise fabrique et revend des jouets.
$f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique $x$ centaines de jouets, pour $x$ compris entre 1 et 10, $f$ désignant la fonction étudiée dans la partie I.

1. Déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.

   Interpréter concrètement le résultat de la question I. 2. Comment le lit-on sur le graphique ?
2. Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1 000 euros.

   Combien de jouets doit-elle fabriquer ? Justifier la réponse.

**Exercice 4(5 points) Commun à tous les candidats**

**Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.**

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.
Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar).

**Partie A**

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

| | Train | Avion | Autocar | Total |
|---|---|---|---|---|
| Femme | 468 | 196 | 56 | 720 |
| Homme | 150 | 266 | 64 | 480 |
| Total | 618 | 462 | 120 | 1 200 |

On interroge au hasard un employé de cette entreprise (on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés).
On note :

F l'évènement : « l'employé est une femme » ;

T l'évènement : « l'employé choisit le train ».

1. Calculer les probabilités $p(\text{F})$, $p(\text{T})$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train (on donnera les résultats sous forme décimale).
2. Expliquer ce que représente l'évènement $\text{F} \cap \text{T}$, puis calculer sa probabilité.
   Les évènements T et F sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
3. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que cet employé soit une femme (on donnera le résultat arrondi au millième).

**Partie B**

Après l'étude des résultats de l'enquête, le comité d'entreprise choisit le train comme moyen de transport. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

- la formule n° 1 : voyage en 1$^{\text{e}}$ classe plus hôtel pour un coût de 150 € ;
- la formule n° 2 : voyage en 2$^{\text{e}}$ classe plus hôtel pour un coût de 100 €.

40 % des employés inscrits choisissent la formule n° 1.
Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30 €. Indépendamment de la formule choisie, 80 % des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.
On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note :

- U l'évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n° 1 » ;
- D l' évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n° 2 » ;
- E l' évènement : « l'employé inscrit choisit l'excursion facultative ».

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
2. Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n° 2 et l'excursion facultative est égale à $0,48$.
3. Soit $C$ le coût total du voyage (excursion comprise).
   (a) Déterminer les différentes valeurs possibles que peut prendre $C$.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de $C$.
   (c) Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.