

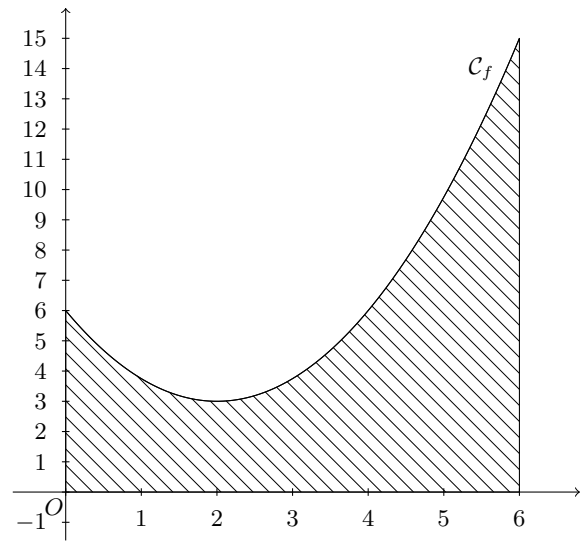
Devoir surveillé n°06 – mathématiques
Épreuve de bac blanc
18/03/2011**Exercice 1 (5 points – Commun à tous les candidats)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre est représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan d'origine O .

La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 6$.



- Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
- On considère un point M appartenant à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse x avec $x \in [0 ; 6]$.
La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H .
La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K .
On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle $OHMK$.
Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 6]$, $R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.
- On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0 ; 6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle $OHMK$ soit égale à l'aire hachurée S .
 - Montrer que le problème précédent revient à résoudre l'équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par :

$$g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36$$
 - Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0 ; 6]$ et dresser le tableau de variation de g . En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0 ; 6]$ une solution unique α .
Donner une valeur approchée de α au centième.

Exercice 2 (5 points – Commun à tous les candidats)

Le but de cet exercice est de démontrer la propriété algébrique fondamentale de la fonction logarithme népérien notée $\ln$.

Propriété fondamentale :

Pour tous réels strictement positifs a et b , $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Rappels

On rappelle les résultats de cours suivants, auxquels le candidat fera clairement référence pour justifier chacune de ses affirmations au cours des étapes de la démonstration (on pourra en rappeler le numéro).

Théorème 1 : Sur un intervalle I , deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Théorème 2 : Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I , la fonction composée définie par $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Théorème 3 : La somme f de deux fonctions dérivables u et v sur un même intervalle I est dérivable sur I et $f' = u' + v'$.

Définition $\ln 1 = 0$.

énoncé de l'exercice

Soit a un réel constant strictement positif.

On considère les fonctions f et g , de la variable x , définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(ax) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln a + \ln x$$

Partie 1

Dans le cas où $a = 2$, donner les fonctions dérivées de $f : x \mapsto \ln(2x)$ et $g : x \mapsto \ln 2 + \ln x$.

Partie 2 : démonstration de la propriété

1. Calculer et comparer les dérivées de f et de g dans le cas général où a est un réel constant strictement positif.
2. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel k tel que,
pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = g(x) + k$?
3. En posant $x = 1$, déterminer la valeur de k .
4. Justifier la propriété fondamentale de la fonction $\ln$ énoncée en début d'exercice.

Exercice 3(5 points – Commun à tous les candidats)

La société INFOLOG a mis au point un nouveau logiciel de gestion destiné aux PME. Cette société a mené une enquête dans une région auprès de 300 entreprises équipées d'ordinateurs aptes à recevoir ce logiciel, ceci afin de déterminer à quel prix chacune de ces entreprises accepterait d'acquérir un exemplaire de ce nouveau logiciel. Elle a obtenu les résultats suivants :

x prix proposé pour le nouveau logiciel en centaines d'euros	y nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix
30	90
25	120
20	170
15	200
10	260

1. Représenter graphiquement le nuage de points de la série $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 200 euros en abscisses et 5 cm pour 100 entreprises en ordonnées).
Placer le point moyen G après avoir déterminé ses coordonnées.
2. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite D d'ajustement affine de y en x sous la forme $y = ax + b$. *Aucun détail des calculs n'est demandé, les résultats ne seront pas arrondis.*
Tracer D sur le graphique précédent.
3. En utilisant l'ajustement précédent, préciser pour quel prix de vente la société INFOLOG peut espérer que les 300 entreprises contactées acceptent d'acquérir ce logiciel.
4. On note $R(x)$ la recette, exprimée en centaines d'euros, dégagée par la vente de y logiciels au prix de x centaines d'euros.
 - (a) En utilisant la relation entre y et x obtenue à la question 2, donner l'expression de $R(x)$ pour x variant entre 5 et 30.
 - (b) Étudier les variations de la fonction R sur $[5; 30]$ et en déduire le prix de vente du logiciel, exprimé en euros, pour que la recette $R(x)$ soit maximale.
Déterminer alors le montant de cette recette ainsi que le nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix.

Exercice 4(5 points – Candidats n’ayant pas suivi l’enseignement de spécialité)

Les parties A et B sont indépendantes.

Les places d’une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d’une comédie à grand succès. Dans cette salle, les hommes représentent 25 % des spectateurs, les femmes $\frac{2}{5}$ des spectateurs et les autres spectateurs sont des enfants. $\frac{1}{5}$ des hommes et 30 % des femmes ont déjà vu ce film au moins une fois. À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.

On appelle :

H l’évènement : « la personne interrogée est un homme »

F l’évènement : « la personne interrogée est une femme »

E l’évènement : « la personne interrogée est un enfant »

V l’évènement : « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection »

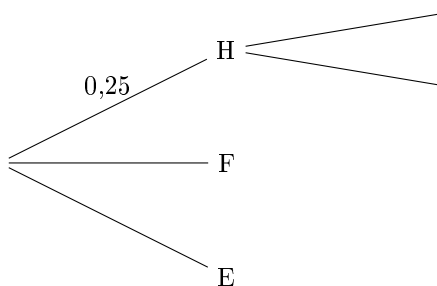
$\bar{V}$ l’évènement : « la personne interrogée n’avait jamais vu le film avant cette projection »

La notation $p(A)$ désigne la probabilité de l’évènement A.

La notation $p_B(A)$ désigne la probabilité de l’évènement A sachant que B est réalisé.

Partie A

- À l’aide des notations ci-dessus, traduire la situation décrite en recopiant et en complétant l’arbre pondéré dont le départ est proposé ci-dessous. On prendra soin de le compléter au fur et à mesure.



- Exprimer à l’aide d’une phrase l’évènement $H \cap V$.
 - Donner $p_H(V)$ et en déduire $p(H \cap V)$.
- La probabilité que l’évènement V soit réalisé est égale à 0,345.
 - Déterminer $p(\bar{V})$.
 - Déterminer la probabilité que si l’on interroge un enfant, il ait déjà vu ce film au moins une fois avant cette projection.
- On interroge au hasard et successivement quatre personnes sortant de la salle. On suppose que le nombre de spectateurs est suffisamment grand pour assimiler l’interrogation au hasard d’un spectateur à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} près, qu’au moins une personne ait déjà vu le film avant cette projection ?

Partie B

À la fin de l’année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu’un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film. Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

- Déterminer q .
- En déduire l’espérance mathématique, arrondie à l’unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 4(5 points – Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Pour chacune des cinq questions suivantes numérotées de 1 à 5, une et une seule des trois propositions a, b, c est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition exacte.

Aucune justification n'est attendue.

Pour chaque question, une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, une absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note pour cet exercice est ramenée à 0.

1. La suite (u_n) est définie par : pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 - \frac{6}{n-10,5}$$

- (a) : La suite (u_n) est croissante.
(b) : La suite (u_n) est décroissante.
(c) : La suite (u_n) n'est pas monotone.

2. La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -0,1u_n$.

- (a) : La suite (u_n) est arithmétique.
(b) : La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
(c) : La suite (u_n) est géométrique.

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan (P) d'équation $x + y + z - 2 = 0$,
- la droite (D) d'équations cartésiennes $y = 1$ et $z = 1 - x$.

- (a) : La droite (D) est sécante au plan (P).
(b) : La droite (D) est incluse dans le plan (P).
(c) : La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

4. La matrice d'un graphe non orienté G, de sommets A, B, C, D, E est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) : Le graphe G comporte 12 arêtes.
(b) : Le graphe G admet une chaîne eulérienne.
(c) : Le graphe G est complet.

5. Les ventes d'un nouveau roman ont régulièrement progressé de 2 % chaque semaine depuis sa parution. Au cours de la première semaine il s'en était vendu dix mille exemplaires.

Le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 semaines écoulées depuis sa parution est :

$$a : 23\,900 \quad b : 718\,927 \quad c : 743\,306$$