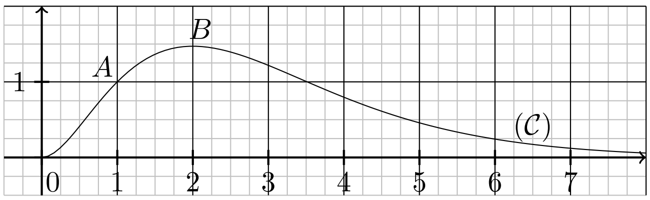
Devoir surveillé n°07 – mathématiques
16/05/2011

Exercice 1 La courbe $(\mathcal{C})$ donnée ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ à valeurs strictement positives sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f. On sait que :

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$.
- La courbe $(\mathcal{C})$ passe par les points O, A et B.
- Le point A a pour coordonnées $(1; 1)$; la droite (OA) est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.
- Au point B de coordonnées $\left(2\ ;\ \dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)$, la courbe $(\mathcal{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.



PARTIE A (6 points – hors spécialité)

1. Donner $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis $f'(1)$ et $f'(2)$ (justifier les résultats).
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln[f(x)]$.
   Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B (12 points – commune à tous)
Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}$$

1. On rappelle que la fonction g est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

   $$g(x) = \ln[f(x)]$$

   (a) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

   $$g(x) = -x + 1 + 2\ln x$$

   (b) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on note g' sa fonction dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (Re)trouver, par le calcul, le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Soit la fonction dérivable h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$h(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x+1}$$

(a) On note h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

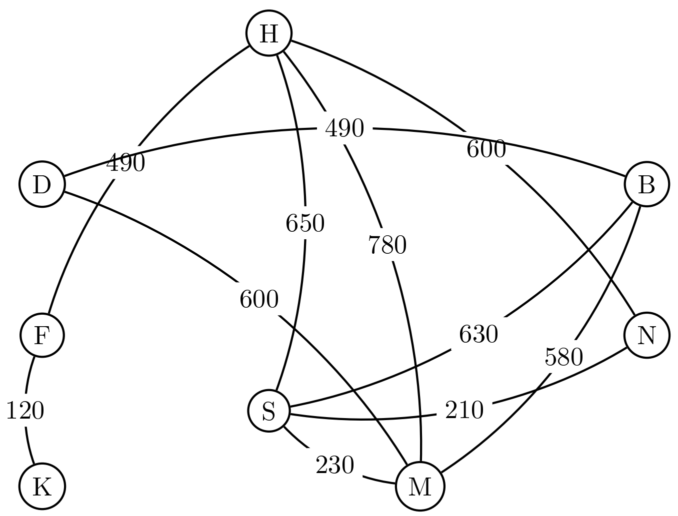
(b) Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = -h'(x)$$

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

(c) Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 2$. Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au dixième.

Exercice 2(6 points - spécialité) À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale.
Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes. Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmnd, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.



En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.