Chapitre 1

Fonctions

A Continuité

→ **Exercice** fiche ex01 (second degré et variations du troisième).
Activité 3p11 (introduction du théorème des valeurs intermédiaires)
→ **Exercice** (DM) Dp10

Définition (Intuitive) Une fonction est **continue** sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe se trace d'un trait « continu », sans lever le crayon.

Exemples graphiques de continuité et non continuité, dont partie entière

Théorème Une fonction obtenue par opérations sur des fonctions usuelles est continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie

Pour une fonction définie par morceaux, c'est à dire avec des expressions différentes selon des intervalles de la forme $[a; b[$ et $[b; c]$ par exemple, il faut regarder s'il y a un saut de valeur en b.

Exemple fonction définie par morceaux
→ **Exercices** 72 (corrigée),71,73
On peut remarquer que lorsqu'une fonction est continue sur $[a; b]$, elle semble prendre toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ au moins une fois.

Dessin (avec deux valeurs de k)

Si la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante, elle semble prendre chaque valeur une unique fois sur l'intervalle $[a; b]$.

Dessin

Cette observation est vraie et donne le théorème suivant :

Théorème (des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, strictement croissante (ou décroissante). Soit k un nombre situé entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe une unique valeur x_0 dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(x_0) = k$.

Tableau de variation

Autrement dit, l'équations $f(x) = k$ admet une unique solution.

Remarque : la valeur de x n'est pas nécessairement déterminable. On sait seulement qu'elle existe. Par contre, on peut en donner une valeur approchée en général.

Exemple Jp19
→ **Exercices** 74,75,76&77p31 (nécessite dérivation pour variations de fonctions poynomiales de degré 3)

B Limites

1 Opérations

Activité 1,2p59 (limites graphiques et calculées)
Voir page 60, tableau d'opérations sur les limites.
→ **Exercices** 14,15p70

Proposition
À l'infini, une fonction polynôme a la même limite que son terme du plus haut degré.
À l'infini, un quotient de polynômes a la même limite que le quotient simplifié de ses termes de plus haut degré.

Exemple Deux exemples de limites ($-2x^3 + 5x - 2$ et $\dfrac{5x^2 - 2x + 4}{2x - 3}$).
→ **Exercices** 16,19,21p70

2 Composition

Activité 3p59 (variations à passer)

Théorème Soit u et g deux fonctions qui se composent en « u suivie de g », notée $g \circ u$. On suppose :

$$\lim_{x\to a} u(x) = k \qquad \lim_{X\to k} g(X) = l$$

Alors

$$\lim_{x\to a} (g \circ u)(x) = l$$

Exemple On veut déterminer $\lim_{x\to 4} \sqrt{5x+5}$. En posant $u(x) = 5x + 5$, et $g(x) = \sqrt{x}$, on a $\sqrt{5x+5} = (g \circ u)(x)$.
On détermine $\lim_{x\to 4} u(x) = 25$ puis $\lim_{X\to 25} g(X) = 5$.
On a donc $\lim_{x\to 4} g \circ u(x) = 5$.
→ **Exercices** 36,37p72
→ **Exercices** 40,41p73

3 Comparaison

Théorème Soit f et g deux fonctions. On suppose que pour x assez grand (pour tout x supérieur à un certain réel A), $f(x) \geq g(x)$. On suppose également que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
g « emmène » f à l'infini en l'infini.

Dessin

Ce théorème a également trois autres versions en changeant les signes des infinis.

Théorème (Des gendarmes) Soit f, g et h deux fonctions. On suppose que pour x assez grand, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. On suppose de plus que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = l$ (l un nombre réel).
Alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$.

Dessin

Ce théorème a également une autre version avec la limite en $-\infty$.
$\rightarrow$ **Exercices** 39p72
$\rightarrow$ **Exercices** 46,47p73

4 Asymptotes

Activité regarder seulement 1p59 et essayer de retrouver le vocabulaire des droites
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne ouverte a telle que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. On dit que la courbe de f admet la droite (verticale) d'équation $x = a$ comme asymptote verticale.

Dessin

Exemple $f(x) = \dfrac{4x}{x-2}$

▲ Il ne peut y avoir d'asymptote verticale que là où la fonction **n'est pas définie**.
Définition Soit f une fonction et c un réel tels que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$. On dit que la droite (horizontale) d'équation $y = c$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

Dessin

Exemple $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2-2}$
Définition Soit Δ une droite d'équation $y = ax + b$ et f une fonction. On dit que la courbe de f admet la droite Δ pour asymptote oblique en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Dessin

Exemple $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{1}{x^2+2}$
On peut chercher à étudier la position relative de la courbe de f et son symptote. Il suffit pour cela d'étudier le **signe** de la différence $f(x) - (ax+b)$.
Voir Gp65
$\rightarrow$ **Exercices** 51,53,54,56p74