

Raisonnement par récurrence

I. INTRODUCTION.....	1
II. LE JEU DES DOMINOS.....	1
III. PREMIÈRE APPROCHE.....	2
1) A QUOI ÇA SERT ?.....	2
2) EN QUOI ÇA CONSISTE ?.....	2
IV. LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE.....	2
1) DÉFINITIONS, NOTATIONS.....	2
2) L'UTILISATION.....	3
3) LA PROPRIÉTÉ.....	3
4) LA RÉDACTION.....	3
V. CONCLUSION.....	5

I. INTRODUCTION

Aujourd'hui c'est une notion forte que nous allons découvrir ensemble : le « Raisonnement par récurrence ». Un outil très important de démonstration qui va vous permettre de démontrer la véracité ou pas de propositions définies en fonctions d'un entier quelconque, pouvant prendre une infinité de valeurs. Je ne vous en dévoile pas plus... C'est parti !

II. LE JEU DES DOMINOS

Le raisonnement par récurrence est comme un jeu de domino. On cherche à montrer que la disposition des dominos est telle que si l'on fait tomber le premier, alors tous les dominos suivant tomberont aussi. C'est bien cela le principe du jeu des dominos non ? Une partie de domino est correcte si mes dominos sont placés de façon à ce que si je pousse le premier alors tous les suivants tombent aussi.

Ainsi pour résumer une partie de domino est correcte si :

- le premier domino tombe ;
- et que pour n'importe quel domino qui tombe, le suivant tombe aussi.

III. PREMIÈRE APPROCHE

1) A QUOI CA SERT ?

Le raisonnement par récurrence sert à montrer la véracité d'une proposition pour tous les entiers naturels supérieur à un premier (par rapport aux dominos, c'est montrer que tous les dominos sur la table vont tomber).

2) EN QUOI CA CONSISTE ?

Comme vous le savez, puisque je vous l'ai rappelé au dessus pour les dominos, il faut respecter deux points pour montrer qu'une proposition est vraie :

- la proposition doit être vraie pour un premier entier (*le premier domino doit pouvoir tomber*) ;
- montrer que pour un certain entier k alors la proposition est vraie pour l'entier suivant $k+1$ (*c'est à dire montrer que pour n'importe quel domino qui tombe, montrer que le suivant tombe aussi*)

En se ramenant aux règles du domino il est clair que si ces deux points sont vérifiés alors tous les dominos vont tomber et donc par analogie, la proposition sera vraie pour tous les entiers supérieur au premier.

IV. LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

1) DÉFINITIONS, NOTATIONS

- Une proposition sera notée $P_{(n)}$ (l'indice montrant la dépendance de la proposition avec l'entier n)

Exemple : Notons $P_{(n)}$ la proposition « $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 » définie **pour tout** $n \in \mathbb{N}$

Remarquons ici que notre proposition est définie **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ (*donc tous les entiers positifs ou nuls*) ce qui regroupe une infinité de propositions à démontrer :

$$\begin{aligned}
 & \ll 10^0 - (-1)^0 \text{ est un multiple de 11 } \gg \\
 & \ll 10^1 - (-1)^1 \text{ est un multiple de 11 } \gg \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \ll 10^{100} - (-1)^{100} \text{ est un multiple de 11 } \gg \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \ll 10^{100000} - (-1)^{100000} \text{ est un multiple de 11 } \gg \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Attention : N'oubliez pas les guillemets autour de votre proposition.

2) L'UTILISATION

Ainsi pour démontrer cette proposition il faudrait montrer qu'elles sont toutes vraies !!!! Mais impossible de les passer toutes en revue une par une. Mais grâce au raisonnement par récurrence nous allons parvenir à faire la démonstration. Souvenez-vous des dominos encore une fois. C'est bon ? Alors vous avez deviné ce qu'il suffit de montrer :

- la proposition est vraie pour le premier entier ;
- si cette proposition est satisfaite par un certain entier naturel k , alors elle est satisfaite par le suivant, c'est-à-dire, par l'entier $k+1$.

Une fois cela vérifié, on peut désormais affirmer que la proposition est vraie pour tous les nombres entiers supérieurs ou égaux au premier.

3) LA PROPRIÉTÉ

Bon et en langage plus mathématiques ça dit quoi ce *raisonnement par récurrence* ? Et bien voilà :

Soit P_n une proposition dépendante d'un entier n et n_0 un entier :

Si P_{n_0} est vraie

et Si pour tout entier $n \geq n_0$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Alors $P_{(n)}$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Remarque : Vous pourrez rencontrer également la formulation *principe d'induction* au lieu de *raisonnement par récurrence*.

4) LA RÉDACTION

La rédaction est probablement la partie du cours la plus, comment dire... barbant. En effet, le raisonnement par récurrence se fait de façon très rigoureuse. Mais en vous rappelant le jeu des dominos, ça devrait rentrer facilement.

Exemple :

Énoncé :

Montrez que la proposition « la somme des entiers de 1 à n vaut : $\frac{n(1+n)}{2}$ » est vraie pour tout entier naturel non nul.

Rédaction de la réponse :

Notons $P_{(n)}$ la proposition « la somme des entiers de 1 à n vaut : $\frac{n(1+n)}{2}$ » définie pour tout entier naturel non nul.

- **Initialisation :**

Ici on va chercher le premier domino qui va tomber, autrement dit on va chercher le plus petit entier où il est demandé de montrer que la proposition est vraie. Dans notre cas, la proposition est définie pour tout entier naturel non nul, le plus petit est donc $n=1$. On va donc chercher à montrer que P_1 est vraie donc que « la somme des entiers de 1 à 1 vaut : $\frac{1(1+1)}{2}$ ».

Pour $n=1$:

$$\text{la somme des entiers de 1 à 1 vaut : 1 et } \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{donc « la somme des entiers de 1 à 1 vaut : } \frac{1(1+1)}{2} \text{ » est vraie}$$

donc P_1 est vraie.

- **Hérédité :**

Ici on va montrer que si un domino tombe alors le suivant tombe. C'est à dire, on va montrer que si la proposition est vraie à un certain entier (nous le noterons k par exemple) alors elle est vraie pour le suivant ($k+1$). Donc on suppose que le $k^{\text{ième}}$ domino est tombé (que la proposition est vraie au rang k) et on va montrer que le $k+1^{\text{ième}}$ domino va tomber (que la proposition au rang $k+1$ est vraie). C'est parti !

Supposons la proposition vraie pour un certain entier k (autrement dit P_k est vraie) et montrons qu'elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$ (que P_{k+1} est vraie), c'est à dire que :

$$\text{la somme des entiers de 1 à } k+1 \text{ vaut : } \frac{(k+1)(1+(k+1))}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Hypothèse de récurrence :

$$P_k \text{ est vraie} \Rightarrow \text{la somme des entiers de 1 à } k \text{ vaut : } \frac{k(1+k)}{2}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} & \text{la somme des entiers de 1 à } k+1 \\ &= 1+2+3+\dots+(k-1)+k+(k+1) \\ &= (1+2+3+\dots+(k-1)+k) + (k+1) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{k(1+k)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (\text{et voilà on retombe sur ce qu'il fallait montrer !}) \end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

- **Conclusion :**

La proposition $P_{(n)}$ est vraie au rang 1 et est héréditaire donc la proposition $P_{(n)}$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

V. CONCLUSION

Ouffff ! Eh bien voilà c'est fini pour ce cours. Donc pour résumer le raisonnement par récurrence trois mots :

INITIALISATION, HÉRÉDITÉ et CONCLUSION.

Cependant avant que vous ne fermiez cette page j'ai un petit récit à vous raconter :

Ce récit concerne un certain Gauss, naît le 30 avril 1777 à Brunswick dans une famille d'artisans. Surdoué, il apprend très vite à lire et à compter vers trois ans. Une seconde anecdote relate comment Gauss est doué pour le calcul mental. Son maître d'école, désireux d'occuper ses élèves un bon moment, demande de calculer la somme des entiers de 1 à 100. Cependant, il fallut peu de temps à Gauss, alors âgé de 10 ans pour donner la bonne réponse. En si peu de temps, il n'avait pu qu'utiliser la formule que nous venons de démontrer en l'appliquant à n valant 100 :

$$\frac{100(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

A méditer... et bonne journée !

Par Anicet62