

Chapitre 1

Géométrie dans l'espace

A Rappels, Généralités

Activité B,C,Dp264 (coordonnées, plans, systèmes)

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Un point M a des coordonnées $(x; y; z)$.

- x est l'abscisse;
- y est l'ordonnée;
- z est la cote.

Définition

- Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
- Les trois points A , B et C définissent un plan si et seulement si ils ne sont pas alignés, ce qui équivaut à dire que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} **ne sont pas colinéaires**.

→ **Exercices** 2,3p275

→ **Exercice** questions pour prouver que trois points définissent un plan (dans 18p276,22,23,24p277)

1 Équation cartésienne d'un plan

L'équation cartésienne d'un plan est :

$$ax + by + cz = d$$

Cela signifie que le plan est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ qui vérifient l'équation.

Il faut savoir reconnaître des plans particuliers :

- – un plan d'équation $x = a$ est un plan parallèle au plan (yOz) (d'équation $x = 0$)
 - un plan d'équation $y = b$ est un plan parallèle au plan (xOz) (d'équation $y = 0$)
 - un plan d'équation $z = c$ est un plan parallèle au plan (xOy) (d'équation $z = 0$)
- – un plan d'équation $ax + by = d$ est parallèle à l'axe (Oz) (z est quelconque)
 - un plan d'équation $ax + cz = d$ est parallèle à l'axe (Oy) (y est quelconque)
 - un plan d'équation $by + dz = d$ est parallèle à l'axe (Ox) (x est quelconque)

Dessins

→ **Exercices** 25,26p278

→ **Exercices** 27,28p278

2 Systèmes

Proposition Deux plans sont parallèles si leurs coefficients en x , y et z sont proportionnels (et pas nécessairement la constante d).

L'intersection de deux plans non parallèles est une droite.

Ainsi, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ solutions d'un système de deux équations linéaires (de plans) à trois variables est une droite si les coefficients en les variables respectives sont proportionnels.

Voir page 268

Résoudre un système d'équations linéaire de trois équations à trois inconnues c'est déterminer si trois plans ont des points d'intersection en commun. En effet, les triplets $(x; y; z)$ qui vérifient les trois équations en même temps sont les coordonnées de points qui appartiennent à trois plans

→ **Exercices** 29,32p278

→ **Exercice** fiche Ex01 (épreuve de Bac)

B Fonctions de deux variables et courbes de niveau

Activité 2p265

Définition Une fonction de deux variables est une fonction qui à tout couple $(x; y)$, avec $x \in I$ et $y \in J$, associe un unique nombre note $f(x; y)$.

Exemple une fonction de coût, qui dépend de deux produits de fabrication.

On représente les valeurs d'une fonction à deux variables dans un repère de l'espace. On obtient alors **une surface**, d'équation $z = f(x; y)$.

On appelle courbe de niveau $z = k$ l'ensemble des points de la surface qui ont pour cote $z = k$. Autrement dit tous les points de coordonnées $(x; y; k)$ tels que $f(x; y) = k$.

À l'aide de certains logiciels on peut représenter la surface en colorant selon les lignes de niveau (Voir page 270).

→ **Exercices** 46,47,48p281

1 Optimisation sous contrainte

On peut chercher à trouver des maxima ou des minima pour les valeurs de $f(x; y)$ sous certaines contraintes, c'est à dire lorsque les valeurs de x et y sont liées par une relation.

On peut avoir une contrainte linéaire, ce qui signifie que $ax + by = d$.

Cette contrainte est donc représentée par un plan dans l'espace, parallèle à l'axe Oz . On peut, si $b \neq 0$, expliquer y en fonction de x , c'est à dire $y = mx + p$.

Il s'ensuit que $f(x; y) = f(x; mx + p)$, ce qui fait que sous cette contrainte, il n'y a plus qu'une variable x , on obtient donc la fonction g d'une seule variable définie par $g(x) = f(x; mx + p)$. Il peut alors être possible de rechercher facilement les valeurs extrêmes de g .

Exemple voir Ep271

→ **Exercices** 49,50p282