

Devoir surveillé n°01 – spécialité mathématiques
22/10/2010

Exercice 1(10 points) Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille. De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 personnes le quittent. En 2005, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.

On note P_n la population de l'année 2005 + n exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminer P_0 , P_1 et P_2 .
2. La suite de terme général P_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier la réponse.
3. Expliquer pourquoi on obtient, pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = 1,014P_n + 7$.
4. Démontrer que la suite U définie par $U_n = P_n + 500$ pour tout entier naturel n est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.
5. Exprimer U_n puis P_n en fonction de n .
6. (a) Combien d'habitants peut-on prévoir en 2010 ?
(b) Au bout de combien d'années la population aura-t-elle doublé par rapport à l'année 2005 ?

Exercice 2(10 points) Soit u la suite définie par : $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$$

1. Construire un repère orthonormé (unité 1 cm), où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.
 - (a) Dans ce repère, tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.
 - (b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 , u_2 et u_3 .
On laissera apparents les traits de construction.
 - (c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite u .
2. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 12$.
 - (a) Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - (b) On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
 - (c) Déterminer la limite de la suite u .
 - (d) (Bonus) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
 - (e) (Bonus) Donner le sens de variation de la suite v . En déduire celui de la suite u .
3. (Bonus) Un magazine est vendu uniquement par abonnement.

On a constaté que :

 - il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;
 - d'une année sur l'autre, 15% des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2008, il y avait 8 000 abonnés.

 - (a) Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite u où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008 + n)$.
 - (b) En utilisant la question 2b, calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2014.