

Exercice 1 Une entreprise de services à la personne propose dans ses services l'entretien de jardins. Pour ce service, cette entreprise a recours à des employés à temps partiel pour une durée globale de x heures, et elle loue le matériel nécessaire pour une durée globale de y heures. La surface de jardin traitée en une semaine, exprimée en centaines de m^2 , est donnée par la fonction $f(x ; y) = \sqrt{2xy}$ où x et y sont exprimées en heures.

Une heure de travail coûte 15 euros et une heure de location du matériel coûte 30 euros. Les contraintes matérielles imposent que $0 \leq x \leq 120$ et $0 \leq y \leq 100$.

La figure 1 donnée en annexe représente la surface \mathcal{S} d'équation $z = f(x ; y)$.

La figure 2 donnée en annexe représente la projection orthogonale de la surface \mathcal{S} sur le plan (xOy) , les courbes de niveau de cette surface étant représentées pour z variant de 10 en 10.

1. (a) Les points $A(20 ; 40 ; z_A)$ et $B(60 ; y_B ; 60)$ sont des points de la surface \mathcal{S} .
Déterminer pour chacun la coordonnée manquante.
- (b) Lire sur la figure 1 les coordonnées du point C et en donner une interprétation concrète.
- (c) Placer sur la figure 1 le point D de coordonnées $(10 ; 80 ; 40)$.
- (d) Donner la nature de la courbe de niveau $z = 50$.
2. Les contraintes financières imposent de fixer le coût hebdomadaire correspondant à 2 400 euros.
 - (a) Démontrer que x et y sont liés par la relation $y = -\frac{1}{2}x + 80$.
 - (b) Quelle est la nature de l'ensemble (\mathcal{E}) des points $M(x ; y ; z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient $y = -\frac{1}{2}x + 80$?
 - (c) Représenter l'ensemble (\mathcal{E}) sur la figure 2 de l'annexe.
 - (d) En déduire graphiquement la surface de jardin maximum qu'on peut traiter avec un coût hebdomadaire de 2 400 euros.
3. (a) Vérifier que, sous la contrainte $y = -\frac{1}{2}x + 80$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$, g étant la fonction définie sur $]0 ; 120[$ par $g(x) = \sqrt{160x - x^2}$.
- (b) Démontrer que sur $]0 ; 120[$, $g'(x) = \frac{80 - x}{\sqrt{160x - x^2}}$, g' désignant la fonction dérivée de g , puis démontrer que la fonction g admet un maximum sur l'intervalle $]0 ; 120[$.
- (c) En déduire le temps de travail et la durée de location hebdomadaire qui permettent de traiter une surface maximum.

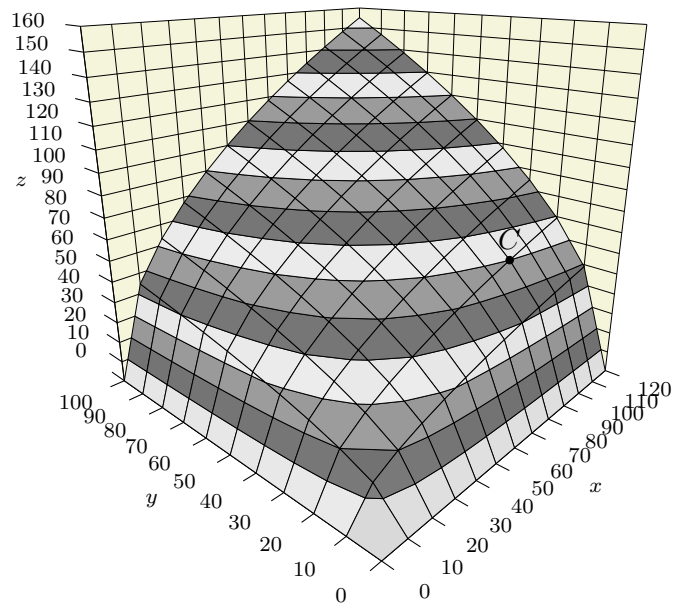


Figure 1

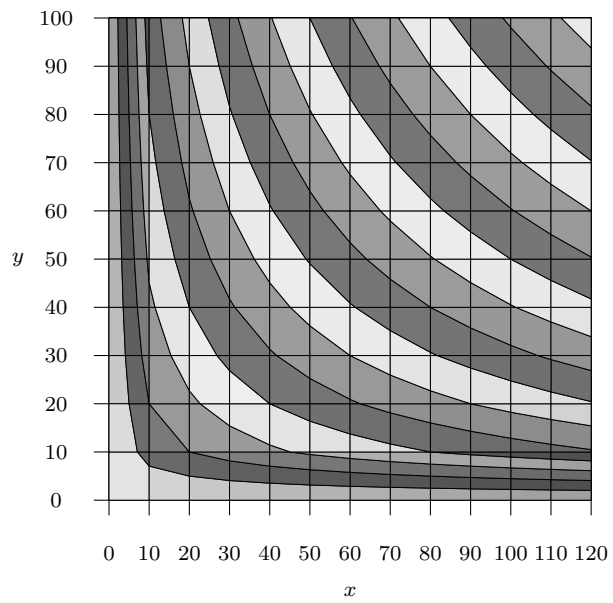


Figure 2