Exercice 1 Dans un village, l'association de gymnastique volontaire possédait 50 adhérents en 2000. Depuis cette date, la trésorière a remarqué que chaque année elle reçoit 18 nouvelles adhésions et que 85 % des anciens inscrits renouvellent leur adhésion.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2000 + n$;
on a donc $a_0 = 50$ et $a_{n+1} = 0,85a_n + 18$ pour tout entier naturel n.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 120$ pour tout $n \geq 0$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 120 - 70 \times 0,85^n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n) quand n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat.
2. Chaque semaine, 60 % des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique et 40 % pour deux heures de gymnastique.
   (a) Exprimer en fonction de n le nombre d'heures de gymnastique à prevoir par semaine pour l'an $2000 + n$.
   (b) Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes. On veut déterminer à partir de quelle année l'association devra prévoir plus de 8 séances par semaine. Démontrer qu'alors n doit vérifier l'inéquation $98 \times 0,85^n < 8$.
   Résoudre cette inéquation et conclure.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 2 Lors d'un jeu, Marc doit répondre à la question suivante :
« Le premier jour, nous vous offrons 100 € puis chaque jour suivant, nous vous offrons 5 % de plus que la veille et une somme fixe de 20 €.
Au bout de combien de jours aurez-vous gagné 10 000 € ? »

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le montant total en € versé à Marc le n-ième jour. Ainsi, $u_1 = 100$.
   (a) Calculer u_2.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 1,05u_n + 20$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n + 400$.
   (a) Calculer v_1.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire que
   $u_n = 500 \times 1,05^{n-1} - 400$.
   (d) Déterminer, en fonction de n, la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
3. Quelle réponse Marc doit-il donner ?