Le raisonnement par récurrence

A Introduction

Le « Raisonnement par récurrence » est une notion des mathématiques. Un outil très important qui permet de démontrer la véracité de propositions définies en fonction d'un entier quelconque, pouvant prendre une infinité de valeurs.

B Le jeu des dominos

Le raisonnement par récurrence est comme un jeu de domino. On cherche à montrer que la disposition des dominos est telle que si l'on fait tomber le premier, alors tous les dominos suivant tomberont aussi. Un partie de domino est correcte si les dominos sont placés de façon que si je pousse le premier alors tous les suivants tombent aussi. Ainsi pour résumer une partie de domino est correcte si :
- le premier domino tombe ;
- et si un quelconque des dominos tombe, le suivant tombe alors aussi.

1 À quoi cela sert-il ?

Le raisonnement par récurrence sert à montrer la véracité d'une proposition pour tous les entiers naturels supérieur à un premier (par rapport aux dominos, c'est montrer que tous les dominos sur la table vont tomber à partir du premier que l'on fait tomber).

2 Comment faire ?

Comme pour les dominos, il faut respecter deux points pour montrer qu'une proposition est vraie :
- la proposition doit être vraie pour un premier entier (le premier domino doit tomber) ;
- montrer que si pour un certain entier k la proposition est vraie, alors elle est vraie aussi pour l'entier suivant $k+1$ (c'est à dire montrer que si un domino quelconque tombe, alors le suivant tombe aussi).

En se ramenant au règles du domino il est clair que si ces deux points sont vérifiés alors tous les dominos vont tomber et donc par analogie, la proposition sera vraie pour tous les entiers supérieurs au premier.
La première étape est appelée étape d'initialisation. La seconde étape est appelée l'étape de récurrence. Cette dernière consiste à montrer que la propriété est héréditaire.

C Raisonnement par récurrence

1 Définitions, notations

• Une proposition sera notée $P(n)$ (La proposition dépend d'un entier n)

Exemple Notons $P(n)$ la proposition « $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 », définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Remarquons ici que cette proposition est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (donc tous les entiers positifs ou nul) ce qui regroupe a priori une infinité de propositions à démontrer :
« $10^0 - (-1)^0$ est un multiple de 11 », « $10^1 - (-1)^n$ est un multiple de 11 », ...,
« $10^100000 - (-1)^100000$ est un multiple de 11 », ...

Les guillemets sont présents pour bien mettre en évidence la proposition.

2 Utilisation

Ainsi pour démontrer cette proposition il faudrait montrer qu'elles sont toutes vraies. Mais il est impossible de les passer toutes en revue une par une ! Heureusement, grâce au raisonnement par récurrence on parvient à faire la démonstration.
Si l'on se rappelle des dominos encore une fois, on devine ce qu'il suffit de montrer :
– la proposition est vraie pour le premier entier ;
– si cette proposition est satisfaite par un certain entier naturel k, alors elle est satisfaite par le suivant, c'est-à-dire, par l'entier $k + 1$.
Une fois cela vérifié, on peut désormais affirmer que la proposition est vraie pour tous les nombres entiers supérieurs ou égaux au premier.

3 Dans le langage mathématique

Voici donné en langage plus mathématique le raisonnement par récurrence :

Soit $P(n)$ une proposition dépendante d'un entier n et n_0 un entier.
Si $P(n_0)$ est vraie et si pour tout entier $n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

4 La rédaction

La rédaction est probablement la partie la plus désagréable de la récurrence. Il s'agit en fait de suivre bien précisément un shéma afin de faire une preuve rigoureuse. Un peu comme il y a un shéma bien précis pour rédiger le théorème de Pythagore.

Le raisonnement par récurrence se fait donc de façon très rigoureuse. Mais en se rappelant le jeu des dominos, on peut facilement le retenir.

Exemple Énoncé :

Montrer que la proposition « la somme des entiers de 1 à n vaut : $\dfrac{n(n+1)}{2}$ » est vraie pour tout entier naturel non nul.
Rédaction de la réponse :

Notons $P(n)$ la proposition « la somme des entiers de 1 à n vaut : $\dfrac{n(n+1)}{2}$ », définie pour tout entier naturel non nul.

- **Initialisation :** *on cherche le premier domino qui va tomber, autrement dit le plus petit entier où il est demandé de montrer que la proposition est vraie. Dans notre cas, la proposition est définie pour tout entier naturel non nul, le plus petit est donc $n = 1$.*
  Prouvons que $P(1)$ est vraie, autrement dit que « la somme des entiers de 1 à 1 vaut : $\dfrac{1(1+1)}{2}$.
  La somme des entiers de 1 à 1 vaut 1. D'autre part, $\dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.
  Ainsi donc P(1) est vraie.
- **Étape de récurrence** (on dit aussi **Hérédité) :** *On montre que si un domino quelconque tombe alors le suivant tombe aussi. C'est à dire, on montre que si la proposition est vraie à un entier quelconque (nous le noterons k par exemple) alors elle est vraie pour le suivant $(k+1)$. Donc on suppose que le $k^{ième}$ domino est tombé (que la proposition est vraie au rang k) et on va montrer que le $k+1^{ième}$ domino va tomber (que la proposition au rang $k+1$ est vraie).*
  Supposons la proposition vraie pour un certain entier k (autrement dit $P(k)$ est vraie) et prouvons qu'elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$ (que $P(k+1)$ est vraie), c'est à dire que :
  $$\text{« la somme des entiers de 1 à } k+1 \text{ vaut : } \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ »}$$
  L'hypothèse de récurrence est que $P(k)$ est vraie, c'est à dire que
  $$\text{« la somme des entiers de 1 à } k \text{ vaut : } \frac{k(k+1)}{2} \text{ »}$$
  Écrivons ce qu'est la somme de sentiers de 1 à $k+1$:

$$\begin{aligned} 1+2+3+.....+k+(k+1) &= (1+2+3+.....+k)+(k+1) \\ & \quad \textit{(chercher à retrouver l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}$$

Ce qui est bien ce qu'il fallait montrer.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

– **Conclusion :** La proposition $P(n)$ est vraie au rang 1 et est héréditaire donc la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

D Conclusion

Pour résumer le raisonnement par récurrence trois étapes à retenir :

Initialisation ; Étape de récurrence ; Conclusion

Un petit récit historique avant de passer aux exercices :
Ce récit concerne un certain Gauss, naît le 30 avril 1777 à Brunswick dans une famille d'artisans. Surdoué, il apprend très vite à lire et à compter vers trois ans. Une seconde anecdote relate comment Gauss est doué pour le calcul mental. Son maître d'école, désireux d'occuper ses élèves un bon moment, demande de calculer la somme des entiers de 1 à 100. Cependant, il fallut peu de temps à Gauss, alors âgé de 10 ans pour donner la bonne réponse. En si peu de temps, il n'avait pu qu'utiliser la formule que nous venons de démontrer en l'appliquant à n valant 100 : $\dfrac{100(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$.
A méditer...

E Exercices

Avant de débuter, lire toute la section 4 page 244 : Les deux étapes de la récurrence sont nécessaires ! On utilisera ici principalement le raisonnement par récurrence avec les suites définies justement par récurrence, car leur définition par récurrence permet de lier P(n+1) à P(n) et donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence.
Faire les exercices suivants : 71,70,72,75p257. Lire le F page 245 (sans oublier la partie « Méthode » à gauche). Faire l'exercice 77p258