Chapitre 1

Graphes

A Généralités

Activité 1p209 (introduction de divers typesde graphes)

Définition

– Un **graphe** est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.
– Un **sommet** du graphe est un point du graphe. Le nombre de sommets est appelé **ordre** du graphe.
– Une **arête** du graphe est une ligne reliant deux sommets. Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.
– Un sommet est isolé lorsque aucune arête ne le relie aux autres sommets.
– Un graphe **simple** est un graphe sans boucle tel qu'entre deux sommets il y a au plus une arête.
– Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
– Un graphe **orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées, d'un sommet à l'autre (on l'indique par une flèche).
– Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité. Une boucle compte alors pour 2.

Dessin

Théorème La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes

Preuve :Évident, puisque une arête compte deux sommets, donc est comptée deux fois dans le calcul des degrés. □

Définition Un graphe complet est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.

Dans un graphe d'ordre n, chaque sommet a donc pour degré $n-1$, et le nombre d'arêtes est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Dessin graphe complet d'ordre 4

→ **Exercices** 4,5,6,7,8p223
→ **Exercice** 12p223 (poignées de main)

B Chaînes et cycles eulériens

Définition

– Une chaîne d'un graphe non orienté est une suite d'arêtes mises bout à bout.
– Une chaîne orientée (d'un graphe orienté) est une suite d'arêtes (orientées) telles que l'extrémité terminale de l'une est l'extrémité initiale de la suivante.
– Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités coïncident et dont **les arêtes sont distinctes**.

Pour noter une chaîne, on liste les sommets que l'on relie par un segment ou une flèche.

Graphe orienté et cycle

Définition Un graphe est **connexe** si quels que soient deux sommets il existe une chaîne les reliant.

Définition Une **chaîne eulérienne** est une chaîne composée de toutes les arêtes prises une seule fois.

Définition Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne qui est aussi un cycle (les extrémités coïncident).

Théorème
– Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne entre les sommets A et B si et seulement si A et B sont de degré impair et les autres sommets sont de degré pair.
– Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si **tous les sommets** sont de degré pair.

Preuve : Admis □
Voir Cp215 : Utilisation du théorème. **Voir** Dp215 : méthode pour obtenir une chaîne ou un cycle eulérien.
→ **Exercices** 23,25,26,27,28p225
→ **Exercices** 31p226 (graphe orienté et connexité), 34p226 (dominos)

C Graphes et matrices

Définition
– **La longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la composent.
– **La distance entre deux sommets** est la longueur de la plus petite chaîne les reliant.
– **Le diamètre d'un graphe** est la plus grande distance existante dans le graphe

Graphe

On peut s'intéresser à la longueur d'une chaîne reliant deux sommets d'un graphe. On peut également vouloir connaître le nombre de chaînes de longueur donnée reliant deux sommets donnés. Pour déterminer cela, on peut utiliser les matrices.

Définition La matrice associée à un graphe d'ordre n est la matrice carrée A de dimension $n \times n$ telle que l'élément a_{ij} vaut le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.
Si i et j ne sont pas adjacents, alors $a_{ij} = 0$. Si le graphe est orienté, on compte les arêtes qui vont de i à j.

graphe et matrice associée.

Théorème Soit A^p la puissance p-ième de A. L'élément p_{ij} de A^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets i et j.

Voir : Exemple p216
→ **Exercices** 40,41,43,47p227
→ **Exercice** 52p228 (diamètre)

D Coloration de graphes

Activité 4p211

Définition Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe composé de sommets de G et d'arêtes de G qui relient ces sommets.
Si l'on prend toutes les arêtes qui relient les sommets du sous-graphe, on obtient ce que l'on appelle le sous-graphe **engendré** par ces sommets.
Un sous-graphe est dit **stable** s'il ne comporte aucune arête.

Dessins

Définition Colorier un graphe, c'est donner une couleur à chacun des sommets du graphe de sorte que deux sommets adjacents quelconques sont de couleur distincte.
Le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier un graphe est appelé le **nombre chromatique** du graphe, on le note $\gamma(G)$ (gamma de G).

Dessin (plusieurs colorations)

Proposition
- Le nombre chromatique d'un graphe complet est égal à l'ordre du graphe.
- Soit D le degré maximum des sommets d'un graphe G. Alors $\gamma(G) \leq D + 1$
- Soit p l'ordre d'un sous-graphe complet d'ordre maximal contenu dans G. Alors $p \leq \gamma(G)$.

Exemple Voir page 218
Colorier un graphe peut s'avérer difficile, surtout s'il est grand et complexe. Il existe un algorithme permettant de le faire, cependant il n'est pas nécessairement obtimal. Autrement dit il ne permet pas de donner $\gamma(G)$, mais seulement une borne supérieure.
Il s'agit de l'algorithme de Welsh et Powel (fiche) :

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants (dans certains cas plusieurs possibilités).
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colorié de la liste.
8. Répéter les opérations 4 à 6.
9. Continuer jusqu'à avoir colorié tous les sommets.

Exemple Voir page 219
→ **Exercices** 63,64,66p230
→ **Exercices** 68,69,71,73p231

E Graphes pondérés

Activité 2p291 (longueur d'une chaîne et poids d'une chaîne)

Définition Un graphe orienté est dit étiqueté lorsque ses arêtes sont affectées d'étiquettes qui peuvent contenir des nombres, des lettres ou des symboles.
On définit un premier sommet appelé départ et un sommet final au moins appelé fin.

Exemple graphe de langage.

Définition Un graphe étiqueté est dit pondéré si les étiquettes sont des nombres positifs, appelés poids.
Le graphe pondéré peut ne pas être orienté.
Le poids d'une chaîne est alors la somme des poids des arêtes qui le composent.
Une plus courte chaîne entre deux sommets donnés est une chaîne de poids minimal parmi toutes les chaînes reliant ces deux sommets.

Exemple Trajets entre des villes avec le temps de trajet ou la distance.
→ **Exercices** 4,5,6p301
→ **Exercices** 7,8p302

F Algorithme de Dijkstra

Lire pages 294 et 295.
→ **Exercices** 15,17p303
→ **Exercices** 12,13,14p303 (QCM)
Présentation par tableau : p296
→ **Exercices** 18,23p303

G Graphes probabilistes

Activité Dp290 puis 3p291 (premier arbre probabiliste simple)
On considère un nombre fini d'états parmi lesquels des individus évoluent en suivant une loi de probabilité qui ne varie pas d'une étape à l'autre. Plus précisément, si l'on considère les états finis $\{1; 2; \ldots; n\}$, et en considérant deux états i et j de cet ensemble, on connaît p_{ij}, probabilité de passer de l'état i à l'état j. Les p_{ij} sont des probabilités conditionnelles : probabilité de passer à l'état j sachant que l'on vient de l'état i.
La matrice M des p_{ij} est appelée **matrice de transition**.
On considère le graphe dont les sommets sont les états, étiqueté par les probabilitées p_{ij}. On appelle un tel graphe un **graphe probabiliste**.
On s'intéresse aux probabilités non conditionnelles. On pourra noter P_n la loi de probabilité, à l'étape n, de l'ensemble des états.
Autrement dit, la loi qui à chaque état i associe la probabilité à l'étape n d'être dans l'état i.
Pour pouvoir déterminer cette loi, il faut déjà que P_0 soit donnée.
On notera également P_n la matrice **ligne** contenant les valeurs de la loi de probabilité P_n.

Exemple voir page 298.
Proposition On a $P_{n+1} = P_n M$, puis par récurrence :

$$P_n = P_0 M^n$$

Preuve : La première égalité provient de l'utilisation des probabilités totales.
La seconde, comme annoncée, vient d'une récurrence. □

Exemple voir Ep299
→ **Exercices** 27,28,29p305
Proposition Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, lorsque n devient très grand, l'état probabiliste P_n tend vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0. Il vérifie :

$$P = PM$$

Preuve : Admis. □

Exemple voir F page 299
→ **Exercices** 30,31p306
→ **Exercice** 32p306 (ne pas tout faire à la question 2)
→ **Exercices** 34p306