Devoir maison n°18
Correction

Exercice 1

1. **Méthode 1.** On détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(2-3;-1-5)$, soit $\overrightarrow{AB}(-1;-6)$.
   Un vecteur normal à la droite (AB) est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. On peut par exemple prendre $\overrightarrow{n}(6;-1)$.
   La droite (AB) a alors une équation de la forme : $6x-y+c=0$.
   Pour déterminer c, on utilise le fait que $A \in (AB)$, et donc $6\times 3-5+c=0 \Leftrightarrow c=-13$.
   Finalement, (AB) a pour équation : $6x-y-13=0$.
   Méthode 2. Soit $M(x;y) \in (AB)$. On a alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ qui sont colinéaires.
   Or, $\overrightarrow{AM}(x-3;y-5)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;-6)$.
   La colinéarité de ces deux vecteurs est équivalente à l'égalité suivante :
   $$(x-3)\times(-6)-(y-5)\times(-1)=0$$
   En développant et en réduisant, on trouve pour équation de (AB) : $-6x+y+13=0$
   Méthode 3. En remarquant que (AB) n'est pas verticale (parce que $y_A \neq y_B$), on peut affirmer que (AB) a une équation de la forme $y=ax+b$.
   a est le coefficient directeur, et sa valeur est donnée par $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1-5}{2-3}=6$.
   Par suite, puisque $A\in(AB)$, on utilise le fait que les coordonnées de A satisfont l'équation, donc $5=6\times 3+b \Leftrightarrow b=-13$.
   Finalement, (AB) a pour équation $y=6x-13$.
2. Le point $C(1;-6)$ est barycentre des points A et B seulement si $C\in(AB)$. Or les coordonnées de C ne vérifient pas l'équation de (AB) : $6\times 1-(-6)-13=-1\neq 0$.
   Donc C n'est pas barycentre des points A et B.
3. Comme $D(0;-13)$ est le barycentre du système $\{(A;a);(B;-2)\}$ (avec $a-2\neq 0$), on a :
   $$x_D=\frac{ax_A-2x_B}{a-2} \qquad \text{et} \qquad y_D=\frac{ay_A-2y_B}{a-2}$$
   On cherche le nombre a qui vérifie **les deux** équations.
   On a :
   $$\begin{array}{rl} & 0=\dfrac{3a-4}{a-2} \\ \Leftrightarrow & 0=3a-4 \\ \Leftrightarrow & a=\dfrac{4}{3} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rrcl} & -13 & = & \dfrac{5a+2}{a-2} \\ \Leftrightarrow & -13(a-2) & = & 5a+2 \\ \Leftrightarrow & -13a+26 & = & 5a+2 \\ \Leftrightarrow & -13a+26 & = & 5a+2 \\ \Leftrightarrow & 18a & = & 24 \\ \Leftrightarrow & a & = & \dfrac{24}{18}=\dfrac{4}{3} \end{array}$$
   Donc $a=\dfrac{4}{3}$ est solution et D est le barycentre du système $\left\{\left(A;\dfrac{4}{3}\right);(B;-2)\right\}$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$$

1. On peut calculer rapidement les limites en 2^- et en 2^+ : On a $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 3x + 6 = 4$.
   De plus, $\lim\limits_{x \to 2^-} x - 2 = 0^-$, donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.
   De même, $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.
   On peut alors conclure, du fait de ces limites infinies en 2, que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.

   Pour déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on doit changer l'expression de $f(x)$.
   $$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{3x}{x^2} + \frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = x\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}.$$
   Or, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} = 1 = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{2}{x}$.
   De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
   De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
2. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 6$, donc $u'(x) = 2x - 3$ et $v(x) = x - 2$, donc $v'(x) = 1$.
   Par suite, $f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)(x-2) - (x^2 - 3x + 6) \times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 3x - 4x + 6 - x^2 + 3x - 6}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Le dénominateur étant un carré, il est positif, et le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-4)$. Ainsi,

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x		-	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$x-4$		-		-	‖	-	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	-	‖	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

3. Voir le tableau précédent.

4. (a) **Version rapide :**

$$f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-1)-2+6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} + \frac{4}{x-2} = x-1+\frac{4}{x-2}$$

donc $a=1$, $b=-1$ et $c=4$.

Version lente :

$$ax+b+\frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2+(b-2a)x+(-2b+c)}{x-2}$$

On veut que cette expression soit égale à celle de $f(x)$, donc par identification des coefficients des expressions polynomiales du numérateur on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b-2a & = & -3 \\ -2b+c & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -3+2\times 1 = -1 \\ c & = & 6+2\times(-1) = 4 \end{array}\right.$$

Et donc on trouve bien : $f(x) = x-1+\dfrac{4}{x-2}$

(b) On a alors $f(x)-(x-1) = \dfrac{4}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$. Donc la droite Δ d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

5.