

Devoir maison n°19
Correction**Exercice 1**

1. Pour tout
- $n \geq 0$
- ,

$$\begin{aligned} w_n &= \left(\frac{1}{3} \times 2^n - (7n + 4) \right) + \left(\frac{1}{3} \times 2^n + 7n + 4 \right) \\ &= \frac{2}{3} \times 2^n \end{aligned}$$

À partir de cette expression, on peut affirmer que w est géométrique de raison 2 et de premier terme $\frac{2}{3}$.

2. Pour tout
- $n \geq 0$
- ,

$$\begin{aligned} t_n &= \left(\frac{1}{3} \times 2^n - (7n + 4) \right) - \left(\frac{1}{3} \times 2^n + 7n + 4 \right) \\ &= -2(7n + 4) \\ &= -14n - 8 \end{aligned}$$

À partir de cette expression, on peut affirmer que t est arithmétique de raison -14 et de premier terme -8 .

3. En ajoutant les égalités
- $w_n = u_n + v_n$
- et
- $t_n = u_n - v_n$
- membre à membre on obtient
- $w_n + t_n = 2u_n$
- et donc :

$$u_n = \frac{w_n + t_n}{2}$$

4. En utilisant les propriétés sur les sommes et les formules de sommes de suites arithmétiques et géométriques :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=0}^n u_i &= \sum_{i=0}^n \frac{w_i + t_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (w_i + t_i) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n w_i + \sum_{i=0}^n t_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + (n + 1) \times \frac{-8 + (-14n - 8)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} (2^{n+1} - 1) + (n + 1)(-8 - 7n) \right) \\ &= \frac{2^n}{3} - \frac{1}{3} - 7n^2 - 7n - 8n - 8 \\ &= \frac{2^n}{3} - 7n^2 - 15n - \frac{25}{3} = \frac{1}{3} (2^n - 21n^2 - 45n - 25) \end{aligned}$$

Exercice 2 Pour aller du **La** à 440Hz au **La** de l'octave supérieure, on multiplie la fréquence par 2 en passant par douze intervalles suivant une suite géométrique. Soit q la raison de cette suite géométrique, on a donc :

$$440 \times q^{12} = 2 \times 440$$

Ainsi donc, $q^{12} = 2$. La calculatrice permet de donner comme valeur approchée $q \simeq 1,0594631$.

Puisque le **Si** est deux notes au dessus du **La**, sa fréquence arrondie au millième est :

$$440 \times q^2 \simeq 493,883 \text{ Hz}$$

Pour donner la fréquence du **Ré#**, on peut utiliser deux moyens :

- Pour obtenir le **Ré#** de l'octave supérieure, on multiplie : $440 \times q^6 \simeq 622,253987$. Il y a en effet 6 intervalles entre le **La** et le **Ré#** supérieur. Le **Ré#** recherché a alors pour fréquence $(440 \times q^6) \div 2 \simeq 311,127 \text{ Hz}$.
- On divise : $440 \div (q^6) \simeq 311,127 \text{ Hz}$. Il y a en effet également 6 intervalles entre de **La** et le **Ré#** inférieur.