

Devoir surveillé n°8 – mathématiques  
06/06/2011

**Exercice 1 (10 points)** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 1}{x - 2}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{D}_f$  de définition de  $f$ .
2. Démontrer que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote verticale et préciser son équation.
3. Déterminer les limites de  $f(x)$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
4. Déterminer  $f'$ , dérivée de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$ .
5. Déterminer alors les variations de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$  et les indiquer dans un tableau de variations complet.
6. On souhaite démontrer qu'il existe une asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
  - (a) Déterminer trois nombres fixés  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

- (b) En déduire que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
7. **Bonus** : Tracer  $\mathcal{C}_f$  ainsi que ses asymptotes dans un repère, pour  $x \in [-3; 7]$  et  $y \in [-20; 20]$ .

**Exercice 2 (10 points)** On considère la suite  $u$  définie pour  $n \geq 0$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 161 \\ u_{n+1} = 0,6u_n + 8 \end{cases}$$

1. (a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .  
(b) En déduire que  $u$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Soit  $v$  la suite définie pour tout  $n \geq 0$  par

$$v_n = u_n - 20$$

- (a) Exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
- (b) Démontrer que  $v$  est une suite géométrique de raison 0,6 et calculer son premier terme.
- (c) En déduire une expression explicite de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- (d) Donner alors une expression explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- (e) Déterminer la limite de  $v_n$ .
- (f) Est-ce que la suite  $u$  converge ?

- (g) Soit  $S_n$  l'expression définie pour  $n \geq 0$  par :  $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$ .

À l'aide de la suite  $v$ , donner une expression explicite de  $S_n$  en fonction de  $n$ .