

Exercice 1 Soit u la suite définie pour $n \geq 0$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle stationnaire (c'est à dire constante) ?
2. Dans la suite, on considère que $u_0 = 5$.

Soit v la suite définie pour tout $n \geq 0$ par :

$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$$

- (a) Démontrer que v est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
- (b) Déterminer alors l'expression explicite de v en fonction de n .
- (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- (d) La suite u converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 2 On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Déterminer un réel a tel que la suite v définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

Dans toute la suite, on pose $v_n = u_n - 5$.

3. (a) Calculer v_0 puis donner l'expression de v_n en fonction de n .
(b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
(c) Déterminer la limite de u .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{i=0}^n v_i$$

- (a) Quelle est l'expression de T_n en fonction de n ? Étudier la limite de T_n .
- (b) Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ? Étudier la limite de S_n .

Exercice 3 On étudie l'évolution de deux réservoirs d'eau A et B . Chaque mois, 20% du réservoir A est versé dans le B et 30% du réservoir B est versé dans le A . On notera u_n et v_n le nombre total de litres le mois n respectivement dans les réservoirs A et B .

Initialement, il y a $u_0 = 230$ litres et $v_0 = 180$ litres.

1. Prouver que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{10}v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + \frac{7}{10}v_n \end{cases}$$

2. On pose $R_n = u_n = v_n$ et $T_n = -2u_n + 3v_n$ pour $n \geq 0$.
(a) Prouver que la suite R est constante, et déterminer la valeur de la constante.
(b) Prouver que la suite T est une suite géométrique dont on donnera les éléments caractéristiques.
3. En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n .
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Interpréter ce résultat.