Chapitre 1

Fonctions polynomiales

Activité A,B du QCM p9 sauf 4,7,8. (généralités sur les fonctions)
Rappels de quelques fonctions usuelles (affines, carré, inverse et second degré).

A Cas général

Définition Une fonction polynomiale (ou fonction polynôme) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire :

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel et a_0, a_1, …, a_n sont des réels.

Définition Si a_n est non nul, l'entier n est appelé le degré de la fonction polynomiale.
Les réels a_0, a_1, …, a_n sont appelés les coefficients de la fonction polynomiale.
l'expression $a_i x^i$ (où i est un entier naturel) est appelé monôme de degré i.

Exemple $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ est une fonction polynomiale de degré 2.
$g(x) = 0$ est la fonction polynomiale nulle.
L'écriture polynomiale d'une fonction polynomiale est unique. Autrement dit :

Proposition Deux fonction polynomiales f et g sont égales si et seulement si :
- f et g ont le même degré
- leurs coefficients sont égaux (indice par indice)

Définition Soit f une fonction polynomiale et x un réel tel que $f(x) = 0$. On dit que x est une racine de f.

→ **Exercice** Fiche Ex01
→ **Exercices** 33,34p24

B Trinômes du second degré

Activité 1p36 (différentes écritures pour différents buts)

Définition Une fonction polynomiale de degré 2 est appelée trinôme du second degré. Un trinôme du second degré est donc une fonction pouvant s'écrire sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a \neq 0$

Étudier un trinôme du second degré, c'est chercher :
- d'éventuelles racines ;
- son signe en fonction des valeurs de x ;
- à tracer sa courbe représentative.

1 Forme canonique

Activité 2p36
L'étude du signe et la recherche de racines sont liées, car on va chercher à factoriser l'expression du trinôme.

$$\begin{aligned} P(x)=ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Cette forme de l'expression de $P(x)$ est appelée la **forme canonique** de P.
On définit $\Delta = b^2 - 4ac$. On a alors :

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

La réponse à notre problème dépend alors du signe de Δ, appelé le **discriminant** du trinôme.
- Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$ et le trinôme n'a pas de racine et est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et le trinôme n'a qu'une racine (dite double) : $x = -\frac{b}{2a}$.
  Le signe de P est celui de a.
- Si $\Delta > 0$, alors Δ a une racine carrée et $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$. Ainsi, $P(x)$ s'écrit sous la forme $P(x) = a[A^2 - B^2]$ que l'on peut factoriser sous la forme $P(x) = a(A - B)(A + B)$.
  Autrement dit, en identifiant A et B,

$$P(x)=a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

  Ce qui fait que P a deux racines,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Un tableau de signe permet de déduire le signe de P :
  P est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé de a entre les deux racines.

Récapitulatif : racines et signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

signe de Δ	racines	signe de la fonction
$\Delta < 0$	$\emptyset$	signe de a
$\Delta = 0$	$\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$	signe de a
$\Delta > 0$	$\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	signe de a à l'extérieur des racines signe de $-a$ entre les racines

Proposition
L'expression factorisée d'un trinôme du second degré qui a deux racines x_1 et x_2 est $a(x - x_1)(x - x_2)$.
Dans le cas où il y a une seule racine x_0 (double), la factorisation est $a(x - x_0)^2$.
On ne sait pas encore factoriser dans le cas où il n'y a pas de racine.

→ **Exercice** acti 3p36 (calculs de Δ)
→ **Exercices** 8,10 p47 (résolution) en DM : 12p47
→ **Exercices** 15,16 p48 (factorisation)
→ **Exercice** 17p48 (fonction rationnelle se simplifiant)
→ **Exercice** 19p48 (ensemble de définition d'une fonction rationnelle)

C Représentation d'un trinôme du second degré

Il s'agit d'un rappel de la classe de seconde, où les variations ont été admises. Nous les admettons encore pour l'instant.

Proposition La représentation graphique d'une fonction polynomiale de degré 2 est une parabole.

Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Le **sommet** de la parabole est atteint en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (et $f(x_0)$ vaut $-\dfrac{\Delta}{4a}$).

– Si a est négatif, ce sommet est un maximum (f est croissante puis décroissante).
– Si a est positif, ce sommet est un minimum (f est décroissante puis croissante).

→ **Exercices** 35,38,34p49
→ **Exercice** en DM : acti 4p37

D Valeur absolue

Définition Soit x un nombre réel. On définit la valeur absolue de x, notée $|x|$, le nombre défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Représentation graphique

La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.
C'est ce qu'à partir du collège on appelle la distance à 0.

Exemple $|-8,2| = 8,2$; $|3,4| = 3,4$.

D'une manière générale, la valeur absolue permet d'écrire de manière condensée une distance entre deux nombres réels.

Exemple Soit M un point d'abscisse x sur une droite graduée. Soit A le point d'abscisse 7 sur la même droite graduée. La distance de A à M vaut :

$$\begin{aligned} AM &= \begin{cases} x-7 & \text{si } x \geq 7 \\ 7-x & \text{si } x < 7 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-7 & \text{si } x \geq 7 \text{ c'est à dire } x-7 \geq 0 \\ -(x-7) & \text{si } x < 7 \text{ c'est à dire } x-7 < 0 \end{cases} \\ &= |x-7| \end{aligned}$$

Dessin

En principe on ne fait pas de calcul littéral avec la valeur absolue, et il faut donc développer sa définition.

Exemple Détaillons la définition de $|x^2+x-6| = |(x-2)(x+3)|$

$$\begin{aligned} |x^2+x-6| &= \begin{cases} x^2+x-6 & \text{si } x^2+x-6 \geq 0 \\ -(x^2+x-6) & \text{si } x^2+x-6 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2+x-6 & \text{si } (x-2)(x+3) \geq 0 \text{ c'est à dire } x \in]-\infty;-3] \cup [2;+\infty[\\ -x^2-x+6 & \text{si } (x-2)(x+3) < 0 \text{ c'est à dire } x \in]-3;2[\end{cases} \end{aligned}$$

Proposition Pour tout réel x, $|x| = |-x|$.
Proposition Soit x et y deux réels. On a l'inégalité suivante, appelée inégalité triangulaire :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Preuve : Admis □
Il n'y a égalité que si x et y sont de même signe
Proposition Soit x et y deux réels, alors :

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

Preuve : C'est une conséquence de la propriété précédente.
→ **Exercice** fiche exercice