Chapitre 1

Barycentres

Activité QCM A et Bp223 (vecteurs, moyennes)
Activité 3p225 (Loi d'Archimède – balance romaine) Barycentre de deux points

A Barycentre de deux points

Définition

1. On appelle **point pondéré** tout couple (A, α) où A est un point de $\mathcal{E}$ et α est un nombre réel.
2. Un ensemble de points pondéré, $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \ldots; (A_n, \alpha_n)\}$ est appelé **système de n points pondérés**.
3. La **masse** d'un ensemble S de points pondérés est la somme $m = \alpha_1 + \alpha 2 + \cdots + \alpha_n$

Définition Soit $S = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système de masse non nulle ($\alpha + \beta \neq 0$).
On appelle **barycentre** du système S l'unique point G tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

On le note $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Proposition Soit un système de masse non nulle $S = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ de barycentre G. Alors :
– **Commutativité :** $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\} = Bar\{(B, \beta); (A, \alpha)\}$
– **Homogénéité :** Pour tout réel k non nul, $G = Bar\{(A, k \times \alpha); (B, k \times \beta)\}$

Preuve : Exercice. □

Théorème Soit $S = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système de masse non nulle, de barycentre G. Alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

De plus, le point G appartient à la droite (AB).

Preuve : Comme $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, on a donc d'après la relation Chasles :
$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
Soit en passant $\overrightarrow{GA}$ de l'autre côté, puis en divisant par $(\alpha + \beta)$ (non nul) :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Comme A est commun, on en conclue que A, B et G sont alignés. Autrement dit, $G \in (AB)$. □

Théorème Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ un système de points pondérés.
– Si $\alpha+\beta = 0$, alors S n'a pas de barycentre et pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\beta\overrightarrow{AB}$$

– Si $\alpha+\beta \neq 0$, alors S a un barycentre G et pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Preuve : Exercice. □
→ **Exercices** 1,3,2,5,6p232
→ **Exercices** 4p232 (lieux de points)

B Barycentre de 3 points

On généralise la définition donnée pour 2 points :
Définition Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système de masse non nulle ($\alpha+\beta+\gamma \neq 0$).
On appelle **barycentre** du système S l'unique point G tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

On le note $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$
Proposition Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta);(B,\gamma)\}$ un système ayant un barycentre G. Soit $m = \alpha+\beta+\gamma$ la masse du système. Alors :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{m}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{m}\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{m}\overrightarrow{BA}+\frac{\gamma}{m}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CG}=\frac{\alpha}{m}\overrightarrow{CA}+\frac{\beta}{m}\overrightarrow{CB}$$

Théorème Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système de points pondérés.
– Si $\alpha+\beta+\gamma = 0$, alors S n'a pas de barycentre et pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$$

– Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, alors S a un barycentre G et pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Preuve : Exercice. □

Remarque Cette propriété permet de transformer une somme dépendant d'un point quelconque en un vecteur seul.

Remarque En particulier, si le système a un barycentre, on peut prendre pour M le point A. L'égalité devient alors :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$$

Ce qui permet la construction du point G·
→ **Exercices** 9p232
Théorème (Associativité) Soit $S = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système de points pondérés de masse non nulle, de barycentre G. Si $\alpha+\beta \neq 0$, en notant $K = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$, alors :

$$G = Bar\{(K,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

Preuve : On a par définition de G : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. En utilisant la relation de Chasles pour introduire K dans les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ on a : $\alpha\overrightarrow{GK} + \beta\overrightarrow{GK} + \alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Or, $\alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$ par définition de K. En factorisant par $\overrightarrow{GK}$, on a : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GK} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Ce qui prouve le théorème. □

→ **Exercices** 20,21p233

→ **Exercice** définition de l'isobarycentre, vérification avec la définition connue du centre de gravité.

C Barycentre d'un nombre quelconque de points

Définition Soit $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ un système de n points pondérés de masse non nulle. On appelle barycentre de S l'unique point G tel que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

On note $G = Bar\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$.

Soit $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ la masse du système. On dit que m est la masse du barycentre G.

Définition Dans le cas particulier où $\alpha_i = 1$ pour tout i (tous les coefficients valent 1), on dit que le barycentre est l'iso-barycentre.

Théorème Soit S un système de n points pondérés de masse non nulle m et de barycentre G. Le barycentre G reste inchangé si l'on remplace une partie des points pondérés de S par leur barycentre, lorsqu'il existe, affecté de la somme de leurs coefficients.

Exemple Soit $S = \{(A, -1); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\}$. On a $-1 + 3 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ donc S admet un barycentre G. Puisque $-1 + 3 \neq 0$ et $1 + 1 \neq 0$n on peut définir :

$$K = Bar\{(A, -1); (B, 3)\} \qquad \text{et} \qquad L = Bar\{(C, 1); (D, 1)\}$$

On a alors

$$\begin{aligned} G &= Bar\{(A, -1); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\} \\ &= Bar\{(K, 2); (L, 2)\} \\ &= Bar\{(K, 1); (L, 1)\} \end{aligned}$$

→ **Exercices** 23p233

Théorème Soit f une transformation usuelle du plan (translation, réflexion, rotation),
et soit $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ un système de points pondérés ayant un barycentre G.
Alors $f(G)$ est le barycentre du système $S = \{(f(A_1), \alpha_1); (f(A_2), \alpha_2); \dots; (f(A_n), \alpha_n)\}$

Exercices supplémentaires / pour DM :

→ **Exercices** 25,26,29p233 (alignement)

→ **Exercice** 30p234 (droites concourantes)

→ **Exercices** 35,36p234 (mélanges)

→ **Exercices** 41,42,43,45p235 (lieux)

D Formules analytiques du barycentre

On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

Proposition Le barycentre du système $\{(A; a); (B; b)\}$ $(a+b \neq 0)$ est le point G de coordonnées $(x_G; y_G)$ telles que :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \qquad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$$

Preuve : Par définition, $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{BG} = \vec{0}$, et pour tout point M,

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$$

En particulier, pour $M = O$,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + b\frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ étant celles de M quel que soit M, on obtient bien la formule de la propriété. □
On généralise la formule au barycentre d'un nombre quelconque de points.

Proposition Les coordonnées du barycentre d'un système sont données par la moyenne des coordonnéees respectives des points du système affectés de leur poids.

Exemple avec trois points
→ **Exercices** 14,15,16p233