Chapitre 1

Angles orientés

Activité 1p246 (radians)

A Définitions

On définit le cercle trigonométrique comme le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on oriente positivement (c'est à dire dans sens opposé des aiguilles d'une montre).
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls.

Définition Le couple $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ est appelé **angle orienté** de vecteurs.

Soit M et N les points tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{ON}$.

Dessin

Définition Une **mesure en radian** de l'angle orienté $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$

On peut représenter tout point du plan par un réel, qui est la mesure en radian d'un angle orienté :

<u>Exemple</u> **dessin** angle noté x.

Définition On dit que M est l'image de x, ou que x est une mesure en radian de $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$, où I est le point de coordonnées $(1;0)$.

Proposition Soit x une mesure d'un angle orienté $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. Alors toutes les mesures de cet angle sont de la forme $x+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Remarque l'angle 2π représente le tour complet du cercle.

Définition On définit **la mesure principale** comme étant la mesure (unique) qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

<u>Exemple</u> Cas particuliers : $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/2$, π.

Proposition Soit M et N deux points du cercle trigonométrique où M est l'image de x et N est l'image de y. La mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$ est le nombre $y-x$.

Dessin

Remarque un angle orienté peut être négatif. Il ne faut pas confondre angle orienté et angle géométrique. La mesure de l'angle géométrique est la valeur absolue de celle de l'angle orienté.
→ **Exercices** 2,3p256 (valeurs), 12,13,14p256 (représentation), 16,17p256 (mesure principale)

B Propriétés

Proposition Deux angles orientés θ et θ' sont égaux si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\theta' = \theta + 2k\pi$$

Remarque cela signifie que $\theta' - \theta$ est un multiple de 2π.
Proposition (Relation de Chasles) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ non nuls,

$$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{w};\overrightarrow{v})$$

Dessin
Conséquences :(avec dessins)

$$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u})$$
$$(-\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$$
$$(\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) + \pi$$
$$(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) + \pi$$

→ **Exercices** 35p257, 37,40p258
Proposition Soit k un réel **positif** et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ un angle orienté. Alors $(k\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$
Proposition Soit deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ces deux vecteurs sont colinéaires et de même sens si $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$.
Ces deux vecteurs sont colinéaires de sens contraire si $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \pi$.
→ **Exercices** 41,42,43,44p258

C Trigonométrie

On considère le cercle trigonométrique dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orienté (c'est à dire $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{J}) = \frac{\pi}{2}$).

Définition Soit α l'image d'un point M sur le cercle trigonométrique. On définit alors :
– le cosinus de α, noté $\cos(\alpha)$, l'abscisse de M.
– le sinus de α, noté $\sin(\alpha)$, l'ordonnée de M.

dessin

La définition est cohérente avec celle donnée pour les angles aigus dans un triangle rectangle. Elle la généralise pour des angles quelconques.

Proposition Le signe du cosinus et du sinus dépend du quart de cercle où se trouve l'image de l'angle :
– Sur $[0; \pi/2]$, le cosinus et le sinus sont positifs ;
– Sur $[\pi/2; \pi]$, le sinus est positif et le cosinus est négatif ;
– Sur $[-\pi; -\pi/2]$, le sinus et le cosinus sont négatifs ;
– Sur $[-\pi/2; 0]$, le cosinus est positif et le sinus est négatif.

Preuve : Dessin
Le cercle trigonométrique étant de rayon 1, on a pour conséquence (essentielle) : $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$.
D'autre part, en considérant le triangle rectangle ayant ses côtés de longueur 1, x et y, on obtient d'après le théorème de Pythagore cette égalité importante :

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

Les angles orientés étant définis à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$),
on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$.
Valeurs usuelles :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Formules pour trouver la valeurs de cosinus et de sinus d'angles associés :

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x) \quad ; \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

dessin

Remarque connaître uniquement le cosinus (resp. le sinus) d'un angle ne permet pas de déterminer celui-ci.
→ **Exercices** 47,48,49,50,52,53 p259

D Coordonnées polaire

Au lieu de repérer un point M dans un repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ par ses coordonnées cartésiennes $(x;y)$, on peu le repérer par les deux nombres $r=OM$ et $\theta=(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM})$, ce qui donne les coordonnées polaires $(r;\theta)$.

dessin

Il est possible de convertir les coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires et réciproquement.

Théorème Soit M un point ayant pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$. Alors les coordonnées polaires $(r;\theta)$ de M sont :
- $r=\sqrt{x^2+y^2}$
- θ est l'angle tel que $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Attention : connaître à la fois le cosinus et le sinus de l'angle est nécessaire pour déterminer θ

Preuve : Dessin □

Théorème Soit M un point ayant pour coordonnées polaires $(r;\theta)$. Alors les coordonnées cartésiennes $(x;y)$ de M sont :
- $x=r\cos(\theta)$
- $y=r\sin(\theta)$

Preuve : Dessin

Voir : Cadres 1 et 2 page 57 pour des exemples de changement de coordonnées.

→ **Exercices** 21,22,24,29,30,31,33p257