

Chapitre 1

Nombre dérivé et applications

A Limite en un réel

Activité fichier Acti01_lim

Définition Soit f une fonction et a et l des réels. On dit que f admet l pour limite en a si $f(x)$ peut être rendu aussi proche de l que l'on veut lorsque x est suffisamment proche de a . On note alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

Exemple Quatre courbes : une "normale", une non définie en a ayant une limite, une avec limite infinie, une avec des limites différentes à gauche et à droite.

Proposition Toutes les fonctions références connues pour l'instant (et en première) ont une limite en tout réel a de leur domaine de définition, et en plus :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

→ **Exercices** 17p113

On s'intéresse cependant le plus souvent à des limites de $f(x)$ en a tel que $f(a)$ n'est pas définie. On utilise la propriété suivante :

Proposition Soit f et g deux fonctions et a un réel contenu dans un intervalle I . On suppose que :

- g est définie sur I et que f est définie sur I sauf en a .
- pour tout $x \in I$, $x \neq a$, $f(x) = g(x)$.
- g admet une limite en a qui vaut $g(a)$.

Alors f admet une limite en a qui vaut $g(a)$.

Exemple $g(x) = x - 2$ et $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)}$. On a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

Nous reverrons de manière plus complète les limites de fonctions.

B Nombre dérivé

Activité 1 et 2 p60 (vitesse moyenne, vitesse instantanée par calcul et graphiquement)

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant un réel a . On dit que f est dérivable en a si l'expression :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite finie l lorsque h tend vers 0. On appelle **nombre dérivé de f en a** cette limite l . On la note $f'(a)$.

On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

(en effet, on pose $x = a + h$)

Géométriquement, le nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est la pente de la droite passant par $(a; f(a))$ et $(a+h; f(a+h))$. La limite est la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe de f en $x = a$.

Exemple Dessin représentant les pentes, M s'approchant du point $A(a; f(a))$.

Exemple soit $f(x) = 2x^2 + 5x - 2$. et $a = 1$. Alors

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2(1+h)^2 + 5(1+h) - 2 - (2(1)^2 + 5(1) - 2)}{h} = \frac{2h^2 + 4h + 5h}{h} = 2h + 9$$

Cette expression a pour limite 9 quand h tend vers 0. Donc $f'(1) = 9$

Exemple En général on s'intéresse plus au nombre dérivé d'une fonction en un point x_0 quelconque. En reprenant la fonction f précédente, on exprime alors :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{2(x_0+h)^2 + 5(x_0+h) - 2 - (2x_0^2 + 5x_0 - 2)}{h} = \frac{2x_0^2 + 4x_0h + 5h}{h} = 2h + 4x_0 + 5$$

Cette expression a pour limite $4x_0 + 5$ quand h tend vers 0. Donc $f'(x_0) = 4x_0 + 5$

→ **Exercices** 6,7p70 (détermination graphique)

→ **Exercices** 1,2p70 (nombre dérivé de fonctions affines et trinômes du second degré)

→ **Exercice** 14p70 (fonction avec racine carrée, aide pour l'expression conjuguée)

Proposition Soit f une fonction admettant un nombre dérivé en a . Alors la tangente à la courbe de f en a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Preuve : Notons $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la droite. La pente de la tangente vaut $f'(a)$ comme remarqué précédemment, donc $\alpha = f'(a)$. Or la droite, tangente à la courbe de f , passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$. Ainsi, $f(a) = f'(a)a + \beta$. Donc $\beta = f(a) - f'(a)a$ et l'équation de la droite est alors :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$$

□

→ **Exercices** 4,5p70

C Approximation affine

Activité 4p61 (sauf 3. Faire observer que c'est la tangente, dont l'équation sera admise)

Proposition (Approximation affine) Soit f une fonction dérivable en a . Alors les valeurs prises par $f(x)$ sont proches, autour de a , des valeurs prises par l'expression de sa tangente en a . Autrement dit :

$$f(x) \simeq f'(a)(x - a) + f(a) \text{ pour } x \text{ proche de } a$$

ou

$$f(a + h) \simeq f'(a)h + f(a) \text{ pour } h \text{ proche de } 0$$

On appelle cette approximation **l'approximation affine de f au voisinage de a**

→ Exercices 17,19,20p71

D Fonction dérivée

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable en tout réel de I , on dit que f est dérivable sur I et on définit une nouvelle fonction, la dérivée de f sur I , notée f' , par :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

. où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x .

Exemple La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout x_0 de $\mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 2ax_0 + b$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée f' est définie par $f'(x) = 2ax + b$.

Proposition Voici donnée dans le tableau ci-dessous les dérivées de fonctions référence :

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Preuve : Faire la preuve pour $f(x) = \frac{1}{x}$, les autres ayant été vues ou étant admises (x^n). □

Proposition (Opération sur les fonctions et dérivées) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I .

- $(u + v)$ est dérivable et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Cas particulier, si $v(x) = k$ (v est constante égale à k , $k \in \mathbb{R}$), $(ku)' = ku'$.
- $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Cas particulier, si $u(x) = 1$, on a $u'(x) = 0$ et donc $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.

Preuve : Faire celle de $u + v$. □

Exemple On souhaite dériver la fonction $f(x) = (3x + 5)\sqrt{x}$. f peut être vue comme un produit : $f = uv$ avec $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction racine carrée v est dérivable sur $]0; +\infty[$ ainsi que la fonction affine u . Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f' = u'v + uv'$. On a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc

$$f'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (3x + 5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

→ **Exercices** 30p71, 31,32,35,39,44p72, 46p73

→ **Exercices** 50,51p73 (ajout de recherches de tangentes par coefficient)