

# Chapitre 1

## Produit scalaire

### I Définition

**Activité** 1p266 (wagonnet tiré par une force formant un angle avec la direction du déplacement)

**Définition** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  des vecteurs quelconques. On définit leur produit scalaire, noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  comme :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

**Exemple** Cas standard, angle et longueurs connues, angle aigu et angle obtus.

**Exemple** Dans le cas où les vecteurs sont colinéaires :

figure

### 1 Projeté orthogonal et produit scalaire

**Définition (Projeté orthogonal)** Le projeté d'un point  $B$  sur une droite  $\mathcal{D}$  est le point  $H$  de  $\mathcal{D}$  tel que  $(BH) \perp \mathcal{D}$ .

**Exemple** Dessin

**Remarque** si  $B \in \mathcal{D}$ , alors  $H = B$ .

**Proposition** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  des vecteurs quelconques. Alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(OA)$ .

Cela revient donc à calculer un produit scalaire dans le cas où les vecteurs sont colinéaires.

**Preuve :** S'aider de dessins (cas selon le type d'angle).

**Exemple** Cela permet de calculer des produits scalaires différemment.

### II Propriétés

**Proposition** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

**Proposition** Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  des vecteurs et  $k$  un réel.

–  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (on dit que le produit scalaire est symétrique)

$$\begin{aligned} - (k\vec{u}) \cdot \vec{v} &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ - \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

En définissant  $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$  (et en remarquant que  $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$ ), on a les propriétés suivantes :

**Proposition** On a les identités remarquables suivantes :

$$\begin{aligned} - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ - (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

→ Exercices 1,2,3,4,5,8,11,15,16p276

→ Exercices 21,22,25,27p277

### III Quelques relations dans le triangle

**Proposition (Formule des sinus)**

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

**Preuve :** Par rotation des notations, il suffit de montrer une seule égalité, et avec le produit en croix il suffit de montrer que

$$a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A}$$

Soit  $x$  la longueur de la hauteur de  $ABC$  issue de  $C$ . Alors  $\sin \hat{B} = \frac{x}{a}$  et  $\sin \hat{A} = \frac{x}{b}$  (figure!). D'où  $x = a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A}$ .

(vrai aussi quand la hauteur sort du triangle car  $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ ). □

**Proposition (Formule des aires)** Soit  $\mathcal{S}$  l'aire de  $ABC$ . Alors :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

**Preuve :** D'après la propriété précédente, la hauteur issue de  $C$  mesure  $a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A}$ . La base associée est le côté de longueur  $c$ . On a donc  $\mathcal{S} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$ . Et de manière similaire pour la dernière égalité en changeant les lettres. □

**Remarque** on a alors  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{S}}$

→ Exercices 28,29,30p277

## IV Expression analytique du produit scalaire

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repère orthonormé du plan.

**Proposition** Soit  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x', y')$  deux vecteurs du plan. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

**Preuve :** Par définition,  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ . Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = \dots = xx' + yy'$$

car  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux et de norme 1. □

**Conséquences :** la norme du vecteur  $\vec{u}$  est  $\sqrt{x^2 + y^2}$  (car  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ).

Et la distance entre deux points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  est  $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

**Théorème** les vecteurs  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y')$  sont orthogonaux si et seulement si  $xx' + yy' = 0$ .

→ Exercices 33,34,35p278 (rappel : longueur dans un repère orthonormé)

## V Droites et cercles

### 1 Droites

**Définition** On dit qu'un vecteur  $\vec{n}$  est normal à une droite  $\mathcal{D}$  si c'est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

**Proposition** Soit  $A$  un point du plan et  $\vec{n}$  un vecteur non nul. L'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est la droite passant par  $A$  qui admet  $\vec{n}$  pour vecteur normal.

**Preuve :** Un point  $M$  sur la droite passant par  $A$  qui admet  $\vec{n}$  pour vecteur normal vérifie bien que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  par définition. Si  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ , alors le vecteur  $\vec{n}$  est normal à la droite  $(AM)$  par définition. Donc  $M$  appartient bien à la droite passant par  $A$  et qui admet  $\vec{n}$  pour vecteur normal. □

**Proposition** Soit  $\vec{n}(a; b)$  un vecteur non nul. Une droite admet  $\vec{n}$  pour vecteur normal si et seulement si elle a une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

**Preuve :** Soit  $A(x_A, y_A)$  un point de la droite qui admet  $\vec{n}$  pour vecteur normal. Alors tout point  $M(x; y)$  de la droite vérifie  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ . En développant, on obtient une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

. Réciproquement, comme  $\vec{n}$  est non nul, supposons que  $a \neq 0$ . Alors le point  $A(-\frac{c}{a}; 0)$  satisfait l'équation.

Soit  $M(x; y)$  un point du plan. Alors  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax + by + c$ . Ainsi, les points vérifiant l'équation sont les points tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ . Il s'agit donc de la droite passant par  $A$  qui admet  $\vec{n}$  pour vecteur normal. □

→ Exercices 37,39,40p278

### 2 Cercles

**Proposition** Dans un repère orthonormé, le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R$  a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

**Preuve :** Soit  $M(x; y)$  un point du cercle. On a  $\Omega M^2 = R^2$ , d'où l'équation.

**Exemple** forme canonique avec  $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$

**Proposition** Le cercle de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

**Preuve :** Le cercle est l'ensemble des points  $M$  tels que  $AMB$  est rectangle en  $M$ , ou  $M = A$  ou  $M = B$ .

**Exemple** cercle de diamètre  $OA$  avec  $A(1, 0) : x(x - 1) + yy = 0$

→ **Exercices** 43,46,47p278 et 49p279

## VI Autres applications du produit scalaire

### 1 Trigonométrie

#### Proposition (Formules d'addition)

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

**Preuve :** L'idée est de calculer un produit scalaire de deux manières différentes, l'une avec les coordonnées, l'autre géométriquement. Soit  $\vec{u}(\cos b; \sin b)$  et  $\vec{v}(\cos a; \sin a)$ . Les deux vecteurs sont de norme 1 et  $(\vec{u}; \vec{v}) = a - b$  (dessin!). Alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$ . En changeant  $b$  par  $-b$ , du fait que  $\sin(-b) = -\sin b$ , on obtient  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ . Pour les autres égalités, on utilise aussi le fait que  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ .  $\square$

#### Proposition (Formules de duplication)

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \sin 2a = 2\sin a \cos a$$

**Preuve :** Simple application des formules d'addition et de  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ .  $\square$

#### Proposition (Formules de linéarisation)

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

**Preuve :** Simple application des égalités de la première formule de duplication.  $\square$

**Exemple** utilisation des formules

→ Exercices 50,51,52p279

→ Exercices 57,58p279