# Chapitre 1

# Suites

## A Définitions

**Activité** A,Bp123 (manipulation d'expressions, remplacement de variables par des expressions)
**Activité** 1p124 (itérations sur un trajet morcelé)

**Définition** Une suite $u$ de nombres réels est une fonction associant à tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à un entier $n_0$ donné, un nombre réel $u(n)$, noté $u_n$.
On dit que $u_n$ est le terme d'indice $n$ de la suite.
On peut noter la suite $u$ sous la forme $(u_n)_{n\geq n_0}$.

**Remarque** Le plus souvent, $n_0 = 0$. On note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Parfois $n_0 = 1$.

**Remarque** Si $n_0 = 1$, le premier terme de la suite est $u_0$, le second $u_1$, etc...
Il ne faut donc pas confondre le **rang** et **l'indice**.

**Exemple**
– La suite $u$ définie par $u_n = \sqrt{n-2}$ est définie pour tout $n \geq 2$. On la note $(u_n)_{n\geq 2}$.
– La suite $v$ définie par $v_n = 2n^2 + 3n - 5$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On la note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## B Deux manières de définir

**Définition** Une suite $u$ est définie de façon **explicite** lorsque le terme général $u_n$ est exprimé en fonction de $n$ ($u_n = f(n)$)

**Exemple** la suite $u$ définie par $u_n = 4n - 7$ est définie explicitement. Ici, $f(x) = 4x - 7$.
On représente une telle suite en plaçant les points $(n; f(n))$ dans un repère.

**Définition** Une suite $u$ est définie **par récurrence** lorsqu'un terme de la suite est définie en fonction du précédent. Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rl} u_{n_0}, & \text{le premier terme, est donné} \\ u_{n+1} = & f(u_n) \text{ pour tout } n \geq n_0\text{, où } f \text{ est une fonction} \end{array}\right.$$

**Exemple** Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 4$. La fonction $f$ associée à la suite est définie par $f(x) = x^2 - 4$.
On représente une telle suite par une « toile d'araignée ». (À montrer au tableau et avec la calculatrice)

→ **Exercices** 1,6,8p140 (calcul de valeurs, utilisation de la calculatrice)
→ **Exercices** 3,9,p140 (travail sur les indices)
→ **Exercices** 10p140 (représentation d'une suite simple)

## C Variations et bornes

**Définition** Soit $u$ une suite définie pour $n \geq n_0$.
– $u$ est croissante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$. Si $u_{n+1} > u_n$, elle est strictement croissante.
– $u$ est décroissante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$. Si $u_{n+1} < u_n$, elle est strictement décroissante.
– $u$ est constante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
– $u$ est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

**Remarque** Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante (donc non monotone)
Pour déterminer les variations d'une suite définie explicitement, on peut étudier la fonction.

**Exemple** Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 0)$, comme la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante, $u$ est décroissante.
Dans le cas général, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

**Exemple** Si $u_{n+1} = u_n + 7$, on a $u_{n+1} - u_n = 7 > 0$, donc la suite est strictement croissante.

**Définition** Soit $u$ une suite définie pour $n \geq n_0$.
– $u$ est majorée s'il existe une réel $M$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.
– $u$ est minorée s'il existe une réel $m$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $m \leq u_n$.
– $u$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

**Exemple** la suite $u$ définie par $u_n = \sqrt{n+4}$ est minorée par 2 car pour tout $n \geq 0$, $\sqrt{n+4} \geq \sqrt{4} = 2$ (la fonction racine carrée est croissante).
→ **Exercices** 14p140,16,17,21p141 (explicites)

# D Suites remarquables

## 1 Suites arithmétiques

**Définition** Soit $n_0$ un entier naturel, $r$ un réel et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. Si, quelque soit $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n = r$, on dit que $u$ est une suite arithmétique de raison $r$.

**Remarque** Cette définition donne une relation de récurrence pour la suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$.

**Remarque** $\dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} = \dfrac{r + u_n - r + u_n}{2} = u_n$ : $u_n$ est la moyenne **arithmétique** de $u_{n-1}$ et $u_{n+1}$.

**Exemple** La suite $u$ définie par $u_n = 5n + 3$ pour tout $n \geq 0$ est arithémtique de raison 5. En effet, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 3 - (5n+3) = 5n + 5 + 3 - 5n - 3 = 5$.
Plus généralement :
Toute suite de la forme $u_n = r \times n + a$, avec $r$ et $a$ des nombres réels, est arithmétique de raison $r$.
La réciproque est vraie :

**Théorème** Soit $r$ un nombre réel et soit $u$ une suite arithmétique de raison $r$, définie pour $n \geq 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r \times n + u_0$. Plus généralement si $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geq p$ :

$$u_n = r \times (n - p) + u_p$$

(utile si la suite est définie pour $n \geq p$)

**Preuve :** Admis □

**Remarque** Ce théorème donne une définition explicite des suites arithmétiques.

**Proposition** Selon la valeur de $r$, on peut déterminer la variation d'une suite arithmétique de raison $r$.

1. Si $r < 0$, alors la suite est décroissante ;
2. Si $r = 0$, alors la suite est constante ;
3. Si $r > 0$, alors la suite est croissante.

**Preuve :** Évident d'après la définition. □

**Proposition** Soit $u$ une suite arithmétique de raison $r$ définie pour $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Alors

$$S_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

**Preuve :** $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + (r + u_0) + \cdots + (nr + u_0) = (n+1)u_0 + r(1 + \cdots + n)$.
Or, $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ car $(1 + \cdots + n) + (n + \cdots + 1) = n(n+1)$.
Donc $S_n = (n+1)u_0 + r\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)2u_0}{2} + r\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n+1}{2}(2u_0 + nr) = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + nr + u_0)$.
Comme $u_n = nr + u_0$, on trouve bien le résultat souhaité. □

→ **Exercices** 22,23,24p141
→ **Exercices** 27,28p141

## 2 Suites géométriques

**Définition** Soit $n_0$ un entier naturel, $q$ un nombre réel et $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite. Si quel que soit $n \geq n_0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$, on dit que $v$ est une suite géométrique de raison $q$.

**Remarque** On définit une suite géométrique par récurrence, puisque $v_{n+1} = q \times v_n$.

**Exemple** Soit $v_n = 2 \times 3^n$ ($n \geq 0$). Alors $v$ est une suite géométrique de raison 3. En effet, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3$.
De manière générale, toute suite de la forme $v_n = b \times q^n$ ($b$ et $q$ réels) est une suite géométrique de raison $q$. La réciproque est vraie :
**Théorème** Soit $q$ un réel non nul et $v$ une suite géométrique de raison $q$. Alors quelque soit $n \geq 0$, $v_n = v_0 \times q^n$.
De plus, si $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geq p$,

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

**Proposition** En fonction de $q$ ($q > 0$), on peut déterminer les variations de la suite géométrique $v$ de raison $q$ :
- Si $q > 1$, alors $v$ est croissante si $v_0 > 0$, décroissante sinon.
- Si $0 < q < 1$, alors $v$ est décroissante si $v_0 > 0$, croissante sinon.

**Preuve :** On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n = v_0 q^{n+1} - v_0 q^n = v_0 q^n (q-1)$.
Dans tous les cas, $q > 0$. le signe de $v_{n+1} - v_n$, ne dépend alors que du signe de $v_0$ et de $q - 1$. Il y a donc quatre cas possibles, qui donnent les variations affirmées par la propriété. □
**Proposition** Soit $v$ une suite géométrique de raison $q$ définie pour $n \geq 0$. Soit, pour tout $n \geq 0$, $S_n = v_0 + \cdots + v_n$. Alors, si $q = 1$, $S_n = (n+1)v_0$ et si $q \neq 1$,

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Preuve :** Si $q = 1$, alors $S_n = v_0 + \cdots + v_0 \times q^n = v_0 + \cdots + v_0 \times 1^n = v_0 + \cdots + v_0 = (n+1)v_0$.
Si $q \neq 1$, $S_n = v_0 + v_0 \times q + \cdots + v_0 \times q^n = v_0 \times (1 + q + \cdots + q^n)$.
Or, $(1 + q + \cdots + q^n) - q(1 + q + \cdots + q^n) = 1 - q^{n+1}$, donc $(1 + q + \cdots + q^n) = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
D'où le résultat. □
→ **Exercice** 32p141
→ **Exercices** 33,34,36,37,38p142
→ **Exercice** 71p144-145

# E Limites et convergence

**Activité** Conjecturer l'existence et la valeur des limites des suites suivantes lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \quad (2n^2-1)_{n\in\mathbb{N}} \quad \left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \left(\cos\frac{3}{n}\right)_{n\geq 1} \quad \left(\frac{2n+1}{n-5}\right)_{n\geq 6}$$

$$(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\sin n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\cos((2n+1)\pi))_{n\in\mathbb{N}}$$

Le but de cette partie est de donner une définition précise concernant les limites d'une suite (nécessairement lorsque $n$ tend vers $+\infty$).

## 1 Définitions

**Définition (Limites finies)** Soit $l$ un réel. On dit qu'une suite $u$ converge vers $l$ si pour tout intervalle ouvert $]a;b[$ contenant $l$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir du quel tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.
Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n_0} \in ]a;b[$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Dessin

Cela signifie que les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de $l$ à partir d'un certain rang $n_0$ pourvu que $n_0$ soit assez grand.

**Définition** Si une suite a une limite réelle (finie), on dit que la suite converge.
Dans le cas contraire, on dit que la suite diverge.

**Proposition** Si une suite converge vers un réel $l$, alors $l$ est la seule limite de la suite.

**Preuve :**Soit $l'$ un réel différent de $l$. on condidère $\varepsilon = \dfrac{|l-l'|}{3}$ les intervalles $]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$ et $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ sont disjoints (dessin).
Comme $u$ converge vers $l$, il existe un rang $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in ]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \notin ]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$.
La suite $u$ ne converge donc par vers $l'$. □

**Proposition** Limites de suites de référence :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*$$

**Définition (Limites infinies)** On dit que la suite $u$ a pour limite $+\infty$ si pour tout réel $A$, il existe un rang $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A$.
On dit que la suite $u$ a pour limite $-\infty$ si pour tout réel $A$, il existe un rang $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq A$.

Dessin

**Remarque** Une suite qui a une limite infinie est une suite divergente. Un autre cas de suite divergente est celui où la suite n'a pas de limite.

**Proposition** Limites de suites de référence :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n\to+\infty} x^p = +\infty \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*$$

→ **Exercices** 42,43p142
→ **Exercices** 46p142

## 2 Opérations sur les limites

La plupart du temps on évite en fait d'utiliser la définition pour démontrer qu'une suite a une limite donnée. On utilise les règles de calcul déjà vues pour les fonctions.
Voir page 132
Les méthodes sont le plus souvent les mêmes que pour les fonctions (si ce n'est que la variable est un entier).

## 3 limites de suites arithmétiques et géométriques

**Théorème** Soit $u$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.
- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ;
- Si $r = 0$, alors la suite est constante et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ ;
- Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Des suites plus intéressantes pour leurs limites sont les suites géométriques.

**Théorème** Soit $u$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $v_0$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ;
- Si $q = 1$, alors la suite est constante et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ ;
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$ ;
- Si $q \leq -1$, alors $u$ diverge (sans avoir de limite).

→ **Exercices** 48,49 p142 (pures)
→ **Exercices** 50p142 ,52,54,57p143

## 4 Comparaisons de suites

**Théorème (des gendarmes)** Soit $u$, $v$ et $w$ trois suites. On suppose :
- qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ ;
- que $u$ et $w$ convergent vers le même réel $l$.

Alors la suite $v$ converge vers $l$.

**Preuve :** Elle utilise la définition donnée à la section précédente. □

Le nom de ce théorème provient du fait que l'on encadre une suite par deux entités qui la mènent d'autorité à un endroit bien déterminé.
Une conséquence de ce théorème est :

**Proposition** Soit $u$ et $v$ deux suites. On suppose :
- qu'à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Alors la suite $u$ converge vers $l$

**Preuve :** cela vient du fait que $|u_n - l| \leq v_n \Leftrightarrow l - v_n \leq u_n \leq l + v_n$. □

→ **Exercice** considérer les suites $\dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\dfrac{1}{n}\cos(n)$.

**Proposition** Soit $u$ et $v$ deux suites. On suppose :
- qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

**Proposition** Soit $u$ et $v$ deux suites. On suppose :

– qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ ;
– $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

**Proposition** Soit $u$ et $v$ deux suites. On suppose :
– qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ ;
– $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$.
Alors $l \leq l'$.

$\rightarrow$ **Exercices**