Petite Histoire des Probabilités

Durant l'été 1654, Blaise Pascal et Pierre de Fermat échangent une correspondance sur des problèmes posés par le chevalier de Méré. Ce dernier est un « homme du monde », ses problèmes portent sur des jeux de hasard pour lesquels on mise de l'argent...

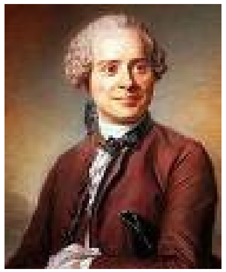

Blaise Pascal

Voici la situation dite du « problème des partis » : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en plusieurs parties, chacun misant au départ 32 pistoles. Le premier des deux qui aura remporté trois parties emportera la totalité du pot, soit 64 pistoles ; celui-ci aura donc gagné 32 pistoles alors que l'autre aura perdu 32 pistoles. Pour une raison inconnue, les deux joueurs sont obligés de s'interrompre avant que l'un ou l'autre n'ait gagné trois manches ; par exemple le joueur A a gagné deux manches et le joueur B en a gagné une.


Pierre de Fermat

Comment faut-il alors répartir en toute justice le pot entre les deux joueurs ?
Puisque le contrat n'a pas été respecté, rendre à chacun ses 32 pistoles serait juste, mais sans intérêt pour Pascal et Fermat.
Ce qu'ils cherchent, c'est le partage fondé sur l'évaluation rigoureuse des chances de gain de chacun des joueurs.
En résolvant le problème, Pascal inaugure ce qu'il appelle la « géométrie du hasard ».
Quel partage entre les deux joueurs proposez-vous ?

Croix ou pile ?
Ce jeu de « pile ou face » [1] consiste à jeter une pièce de monnaie en l'air, on gagne si l'on obtient « pile » en deux coups au maximum.



Jean le Rond d'Alembert, rédacteur des articles sur la science dans l'Encyclopédie, résout le problème ainsi en 1760 :
« *On ne peut compter à ce jeu que trois cas différents : à savoir face au premier coup et pile au second, face au premier coup et pile au second, pile au premier coup ce qui dispense de jouer un second coup. On a donc deux chances sur trois de gagner*. »
D'Alembert a-t-il raison ? Ses arguments correspondent-ils à la réalité ?

[1] Voir l'encadré ci-contre pour le texte original de d'Alembert ; on notera l'ancienne appellation du jeu, « croix ou pile » puisque à l'origine, une croix était représentée sur l'un des côtés de la pièce, avant que l'effigie du roi ne vienne la remplacer...

Passe-dix est un jeu de hasard qui se pratique avec trois dés. A chaque manche on lance trois dés et on ne gagne que pour les sommes de 11 à 18, sinon, on perd. Acceptez-vous de jouer à « passe-dix » ?


Galileo Galilée

Le problème du duc de Toscane : ayant probablement observé un très grand nombre de parties de passe-dix, il avait constaté que la somme 10 était obtenue un peu plus souvent que la somme 9 ; pourtant, il y a autant de façons d'écrire 10 que 9 (six pour chaque).
Vers 1620, Galilée rédigea une explication, éditée en 1718.

CROIX OU PILE, (*analyſe des haſards.*) Ce jeu, qui eſt très-connu, & qui n'a pas beſoin de définition, nous fournira les réflexions ſuivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amenera *croix* en jouant deux coups conſécutifs. La réponſe qu'on trouvera dans tous les auteurs, & ſuivant les principes ordinaires, eſt celle-ci. Il y a quatre combinaiſons.

Premier coup.	Second coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaiſons, une ſeule fait perdre & trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce.
. . .
cela eſt-il bien exact ? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaiſons qui donnent *croix* au premier coup ? Car, dès qu'une fois *croix* eſt venu, le jeu eſt fini, & le ſecond coup eſt compté pour rien. Ainſi, il n'y a proprement que trois combinaiſons de poſſibles :

Croix, premier coup.
Pile, *Croix*, premier & ſecond coup.
Pile, *pile*, premier & ſecond coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.
. . .
digne, ce me ſemble, de l'attention des calculateurs, & iroit à réformer bien des règles unanimement reçues ſur les jeux de haſard.

Probabilités

I. Vocabulaire

- Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne peut prévoir l'issue.
  exemple 1 : lancer un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6
  exemple 2 : choisir au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes

- *L'univers* associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
  exemple 1 : l'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
  exemple 2 : l'univers contient 32 issues.

- Un *événement* E est une partie de l'univers Ω.
  exemple 1 :
  E est l'événement « obtenir un 5 » ;
  F : « obtenir un nombre pair ».
  exemple 2 :
  soit A l'événement « obtenir un as »,
  et B l'événement « obtenir un cœur »

- L'événement « A et B » est noté $A \cap B$ et il est réalisé lorsque A et B sont réalisés simultanément (« à la fois », « en même temps »)
  exemple 2 : $A \cap B$ est l'événement « obtenir l'as de cœur »

- L'événement « A ou B » est noté $A \cup B$ et il est réalisé lorsque l'un au moins des deux événements est lui-même réalisé. Il est donc constitué de toutes les issues des deux événements.
  exemple 2 : $A \cup B$: « obtenir un cœur ou un as ».
  $A \cup B$ comporte donc ...... issues favorables.

- On dit que A et B sont *incompatibles* lorsqu'ils ne peuvent se réaliser simultanément.
  exemple 1 : E et F ......
  exemple 2 : A et B ....

- *L'événement contraire* de E est le complémentaire de E dans Ω.
  On le note $\overline{E}$.
  E et $\overline{E}$ sont incompatibles et leur réunion forme Ω.
  exemple 1 : $\overline{E} = \{........................\}$
  exemple 2 : $\overline{B}$ comporte ...... issues.

- *Evénement élémentaire* : c'est un événement qui ne comporte qu'une seule issue.
  exemple 1 : « obtenir un 5 »
  exemple 2 : « obtenir une dame » n'est pas un événement élémentaire.

- Un *événement impossible* ne peut se réaliser.
  exemple 1 : « obtenir un 7 »
  exemple 2 : « obtenir un 3 »

- Un *événement certain* est toujours réalisé.
  exemple 1 : « obtenir un nombre entier »

- On réalise ou simule n fois une expérience aléatoire et on note la fréquence f_i de chaque issue (ou éventualité) e_i
  $$f_i = \frac{\text{nombre de réalisations de } e_i}{n}$$
  exemple 1 : on lance 100 fois un dé et on obtient la distribution de fréquences :

e_i	1	2	3	4	5	6	somme
f_i	0,15	0,18	0,16	0,17	0,17		

  Loi des grands nombres : si l'on fait tendre le nombre d'expériences n vers l'infini, la fréquence de chaque issue e_i tend vers une fréquence théorique p_i , la probabilité de l'issue e_i
  exemple 1 :

e_i	1	2	3	4	5	6	somme
p_i							

II. Probabilités

- Soit $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.
  On définit une loi de probabilité lorsqu'à toute issue e_i de Ω on associe le réel $p(\{e_i\})$ tel que : $0 \leq p(\{e_i\}) \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{i=n} p(\{e_i\}) = 1$

- La probabilité mesure les chances de réalisation d'un événement, elle permet de comparer des événements.

  Si un événement est impossible, sa probabilité est égale à 0 ; un événement certain a pour probabilité 1.

  Si la probabilité d'un événement est proche de 1, l'événement a de « bonnes chances » de se réaliser. Si la probabilité de *A* est inférieure à celle de *B,* alors *A* possède moins de chances de se réaliser que *B*.

- **Probabilité P(*E*) d'un événement *E*** :
  C'est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
  exemple 3 : on utilise un dé truqué et on donne les probabilités d'apparition des différentes faces.

e_i	1	2	3	4	5	6	somme
p_i	0,08	0,12	0,1	0,1	0,1	0,5	1

  La probabilité d'obtenir au moins 4 est égale à ....

- **Equiprobabilité** : on émet l'hypothèse que la loi de probabilité est équirépartie, c'est-à-dire que les *n* événements élémentaires ont tous la même probabilité. Pour tout *i*, $p(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$

exemple 1 : en supposant le dé parfaitement équilibré, la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité de chacune des éventualités est $\frac{1}{6}$

exemple 4 : une urne contient 2 boules vertes notées V_1 et V_2 ainsi qu'une rouge. $P(V_1) = P(V_2) = P(R) = \frac{1}{3}$

- **Calcul de probabilité** : sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement *E* est $P(E) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } E}{\text{nombre total d'issues de } \Omega}$

exemple 1 : *P*(*E*) = ... et $P(\overline{E})$ = ...

exemple 2 : *P*(*A*) = ... = ... ; *P*(*B*) = ... = ... ;

$P(A \cup B)$ = ... et $P(A \cap B)$ = ...

exemple 4 : P(« obtenir une boule verte ») = ...

- **Propriétés** :
  Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et *E* un événement de Ω.
  $0 \leq P(E) \leq 1$

  Soit *A* et *B* deux événements quelconques de Ω.
  $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

  exemple 2 : la probabilité d'obtenir un as ou un cœur est

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dots$

  $\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$
  démonstration :

  $\boxed{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$

  Exemple 3 : P(« obtenir au moins 2 ») = 1 – P({1}) = ...

III. <u>Techniques de dénombrement</u>

1. Diagramme de Venn

Exemple : une classe compte 32 élèves. 14 étudient l'allemand, 20 étudient l'anglais et 12 étudient l'allemand et l'anglais.
Calculer la probabilité des événements
A : « l'élève étudie l'anglais »,
B : « l'élève étudie l'allemand,
C : « l'élève étudie l'anglais et l'allemand »,
D : « l'élève étudie l'anglais mais pas l'allemand »,
E : « l'élève étudie l'allemand ou l'anglais »
et F : « l'élève n'étudie ni l'anglais ni l'allemand »

2. Tableau à double entrée

Exemple : on lance 2 dés et on calcule la somme.
Quelle est la somme la plus probable ?

3. Arbre

Exemple : on lance 3 pièces de monnaie et pour chacune d'entre elles, on note le côté obtenu « Pile » ou « Face ».
Quelle est la probabilité d'obtenir 3 résultats identiques ?

IV. Etude d'une variable aléatoire

Exemple :

Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules bleues.
Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est bleue, son gain est de 10 €, si elle est verte, le gain est de 5 €. Il perd 1 € lorsque la boule est rouge.
La variable aléatoire X associe à chaque boule tirée le gain du joueur.
Ce jeu est-il équitable ?

1) Définition

On considère une expérience aléatoire et on munit l'univers associé Ω d'une loi de probabilité P.
On définit une variable aléatoire X sur Ω lorsqu'on associe un réel à tout événement élémentaire de Ω.
La loi de probabilité de la variable X est la fonction qui à toute variable x_i prise par X associe le réel $P(X = x_i)$ (probabilité notée p_i)

Exemple :

- L'univers est $\Omega = \{V_1 ; V_2 ; V_3 ; B_1 ; B_2 ; R_1 ; R_2 ; R_3 ; R_4 ; R_5\}$, ensemble des 10 tirages possibles.
- X prend pour valeurs .... (notation : $X(\Omega) = \{-1 ; 5 ; 10\}$)
- Déterminons la loi de probabilité de X.

  Par exemple : $P(X = -1) = P$(« la boule est rouge ») = ... = ... = ...

x_i	-1	5	10	somme
$P(X = x_i)$				

2) Espérance mathématique

Le joueur précédent joue 1000 fois. D'après les calculs précédents, il peut *espérer* obtenir environ 200 fois une boule bleue, 300 fois une boule verte et 500 fois une boule rouge.
Si le nombre de parties tend vers $+\infty$, la répartition des tirages des couleurs bleue, rouge ou verte tendra vers cette proportion (c'est la loi des grands nombres)
Son gain total serait alors : ....

et son gain moyen par partie : ....= ..... €

définition :
L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le réel

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n$$

C'est la valeur moyenne que X peut espérer prendre (sur un grand nombre d'expériences), moyenne pondérée où les coefficients sont les probabilités des valeurs prises par X.

Exemple :

$E(X)$ = ... = ...
Si l'on veut un jeu équitable, on fixera la mise de départ à 3 €. Ainsi, si l'on note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le gain en tenant compte de la mise :

y_i			
$P(Y = y_i)$			

d'où $E(Y)$ = ...

Un organisateur de jeu à grande échelle fixerait la mise à un niveau supérieur à 3 et il pourrait estimer son propre gain !
Par exemple, s'il fixe la mise à 5 €, l'organisateur peut espérer gagner en moyenne 2 € par jeu. Si 100 000 personnes ont joué, après redistribution des gains, il empochera en moyenne …

3) Ecart type

Afin de mesurer la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire X autour de $E(X)$, on calcule l'écart type.
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ où $V(X)$ est la variance de X, définie comme en statistiques.

définition : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2$

propriété : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \times x_i^2 \right) - (E(X))^2$

exemple : $V(X)$ = ...

d'où σ ≈ .... €