

Chapitre 1

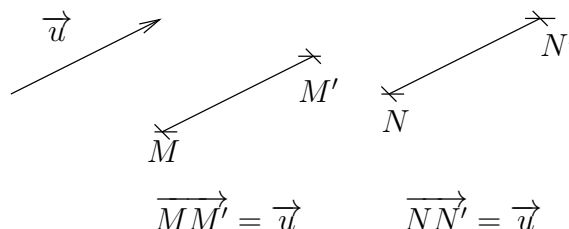
Translations et homothéties

A Définitions

1 Translation

Définition Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

On la note parfois $t_{\vec{u}}$. On dit que M' est le translaté de M par $t_{\vec{u}}$.



Proposition Soit $t_{\vec{u}}$ une translation.

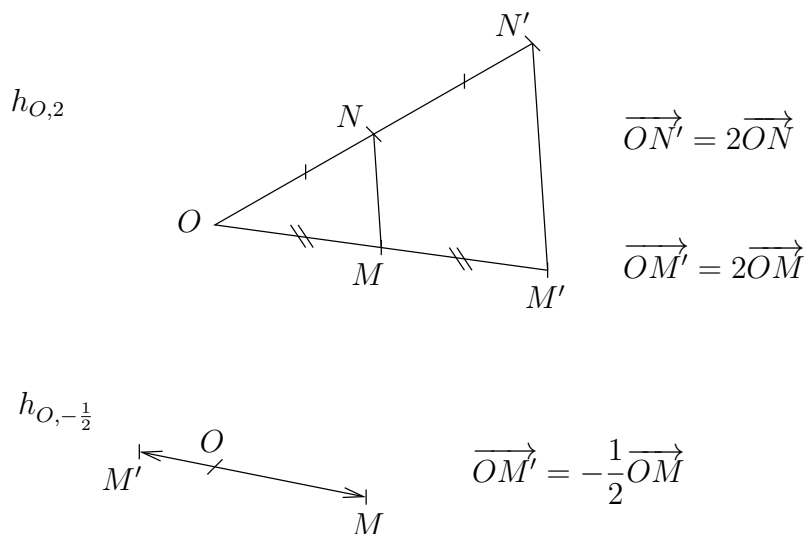
- Si $\vec{u}$ est non nul alors $t_{\vec{u}}$ n'admet aucun point fixe (point M tel que $t_{\vec{u}}(M) = M$).
- Soit $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $N' = t_{\vec{u}}(N)$. Alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ (on a un parallélogramme).

Preuve : Égalités vectorielles avec Chasles. □

→ Exercices 1,2,3p320

2 Homothétie

Définition Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul (k peut être négatif). On appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. On la note parfois $h_{O,k}$.



Proposition Soit h une homothétie de centre O et de rapport k . Alors :

1. Si $k \neq 1$, alors le seul point fixe de h est O .
2. Soit $M' = h(M)$. Alors O , M et M' sont alignés.
3. Soit $N' = h(N)$. Alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.
4. Si M , N et O ne sont pas alignés, alors M et N avec leurs images forment avec O une configuration de Thalès.

Preuve : Pour le troisième point on utilise la définition d'homothétie et la relation de Chasles. □

→ **Exercices** 7p320 (construction), 8,9p320 (recherche du rapport)

B Propriétés

Proposition Translations et homothéties conservent la colinéarité (de deux vecteurs).

Preuve : Cela vient des propriétés précédentes.

On a $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{CD}$ ($k = 1$ si la transformation est une translation).

Donc si $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$, on a alors $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{C'D'}$. □

Proposition Translations et homothéties conservent le barycentre, et donc l'alignement.

Preuve : Si $\sum a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, alors, puisque $\overrightarrow{G'A'_i} = k\overrightarrow{GA_i}$, $\sum a_i \frac{1}{k} \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$ et donc $\sum a_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$

Autrement dit : l'image d'un barycentre est le barycentre des images.

Conséquences :

Proposition

- L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle ;
- L'image d'un segment $[AB]$ est le segment dont les extrémités sont les images de A et B ;
- L'image de l'intersection de deux droites est l'intersection de l'image des droites ;
- L'image d'un cercle de rayon R est un cercle, de même rayon pour une translation, de rayon $|k|R$ pour une homothétie de rayon R , et de centre l'image du centre.

Proposition Les angles orientés sont conservés par une translation ou une homothétie.

Proposition Une homothétie de rapport k multiplie :

- Les longueurs par $|k|$;
- Les aires par k^2 ;
- Les volumes par $|k|^3$.

(Les homothéties font des agrandissements et des réductions)

→ **Exercices** 20,21p321

Correction de l'exercice 21p321 :

1. L'image de A par $h = h_{O,3}$ est A' par définition, car $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$. Soit B' l'image de B . L'image de (AB) est donc la droite $(A'B')$, et est parallèle à (AB) . Ainsi, B' est le point d'intersection entre (OB) et la parallèle à (AB) passant par A' .
Autrement dit, $B' = I$: l'image de B par h est I .
2. L'image de (BC) est la parallèle à (BC) passant par $B' = I$, à laquelle J appartient ; c'est donc (IJ) .
L'image de (AC) est la parallèle à (AC) passant par A' , à laquelle J appartient ; c'est donc $(A'J)$.
3. L'image par h de l'intersection de (BC) et de (AC) est l'intersection des images de (BC) et de (AC) , autrement dit l'image de C est l'intersection de (IJ) et de $(A'J)$, donc J .
Puisque $h(C) = J$, on obtient que O, C et J sont alignés.