LYCÉE ALFRED KASTLER **Seconde**
2010–2011

Devoir maison n°12
Correction

Exercice 1

1. L'équivalence qui est fausse est la première. En effet, l'élève multiplie par $(x-2)$ sans changer le sens de l'inégalité alors que le signe de $(x-2)$ n'est pas précisé (x est *a priori* quelconque).
2. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1-(x-2)}{x-2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1-x+2}{x-2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3-x}{x-2} \geq 0
\end{aligned}$$

Par suite, $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ et $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, et donc :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{3-x}{x-2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Finalement, $\mathcal{S} =]2;3]$.

3. Pour conserver l'idée de suppression des fractions, il faut étudier attentivement le signe de ce par quoi l'on multiplie, en l'occurrence ici $(x-2)$.
   (a) Si $x-2=0$, *i.e.* si $x=2$, la fraction n'est pas définie, donc c'est impossible.
   (b) Si $x-2>0$, *i.e.* si $x>2$, alors on trouve ce que l'élève a fait, c'est à dire $x \leq 3$. On trouve alors une partie de solutions : l'ensemble des x qui sont à la fois strictement supérieurs à 2 et inférieurs ou égaux à 3. Il s'agit de $]2;3]$.
   (c) Si $x-2<0$, *i.e.* si $x<2$, alors l'inéquation change de sens, et l'on trouve alors $x \geq 3$. On obtient alors éventuellement une autre partie de solutions : l'ensemble des x qui sont à la fois strictement inférieurs à 2 et supérieurs ou égaux à 3. Ces conditions ne pouvant être remplies en même temps, cet ensemble est vide.

   L'ensemble des solutions est l'union des solutions dans les différents cas, ici simplement $]2;3]$.

Exercice 2

1. En appliquant l'algorithme on obtient le tableau suivant :

i		1	2	3	4
m		0,5	0,75	0,625	0,6875
a	0	0,5	0,5	0,625	0,6875
b	1	1	0,75	0,75	0,75

   Pour la colonne avec i $= 2$, $m = \dfrac{0,5+1}{2} = 0,75$, puis f(m) $= -0,109375$ n'est pas du même signe que f(a) $= 2,375$, donc b prend la valeur de m.

2. L'algorithme, pour cette fonction f, conserve le fait que f(a) > 0 et f(b) < 0.
   Puisque à la fin il affiche l'intervalle [a;b], on peut dire qu'il donne un intervalle permettant d'encadrer le nombre α tel que f(α) $= 0$.

3. Plus N augmente, plus la précision de l'encadrement est grand. L'intervalle est en effet réduit de moitié à chaque itération de la boucle `Pour`.

Cet algorithme est appelé **algorithme de dichotomie**. Il existe d'autres manières de le mettre en œuvre selon ce qui est recherché comme résultat, mais l'idée est toujours de diviser la taille de l'encadrement par deux à chaque étape et de comparer les signes des images.