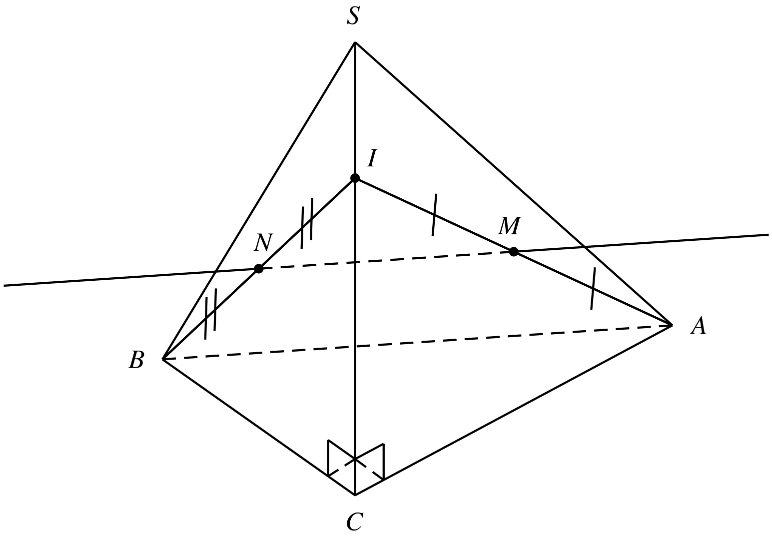
Seconde
Devoir commun 2

24.02.11

Exercice 1 (5 points)

1)



2) ⋆ A, B et I étant trois points non alignés, ils définissent le plan (ABI).
   ⋆ Comme M appartient à la droite (AI), il appartient au plan (ABI) et comme N appartient à la droite (BI), il appartient aussi au plan (ABI).

   Les cinq points I, A, B, M et N appartiennent donc au plan (ABI) et sont coplanaires.

3) Dans le triangle ABI, M est le milieu de $[IA]$ et N est le milieu de $[IB]$. Par conséquent, d'après le théorème des milieux, la droite (MN) est parallèle à la droite (AB).

4) Comme la droite (MN) est parallèle à une droite du plan (ABC), à savoir la droite (AB), elle est parallèle au plan (ABC).

5) ⋆ On commence par calculer AC. Comme le triangle ABC est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

   On en déduit que $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, puis que $AC = \sqrt{16} = 4$.

   ⋆ Le triangle ABC étant rectangle en C, son aire est

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BC \times AC}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6.$$

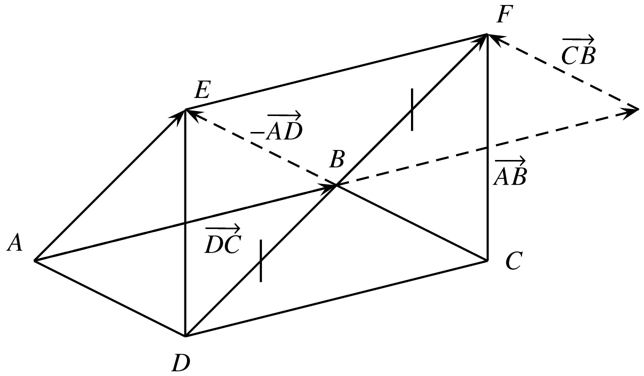
   ⋆ Enfin, (SC) étant la hauteur issue de S du tétraèdre $SABC$, le volume de celui-ci est

$$\frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times SH = \frac{1}{3} \times 6 \times 7 = 14.$$

   Le volume de $SABC$ est 14 cm^3.

Exercice 2 (7 points)

1)



2) a) Par définition, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}.$$

Enfin, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$. Ainsi, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF}$.

b) Comme $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF}$, le point B est le milieu du segment $[DF]$.

3) a) En utilisant la définition du vecteur $\overrightarrow{AE}$, on obtient, d'après la règle du parallélogramme,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}.$$

Or, d'après la question 2.a, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF}$. Par conséquent, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$.

b) Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$, le quadrilatère $ABFE$ est un parallélogramme.

c) Comme $ABFE$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On en déduit que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$, puis que le le quadrilatère $EFCD$ est un parallélogramme.

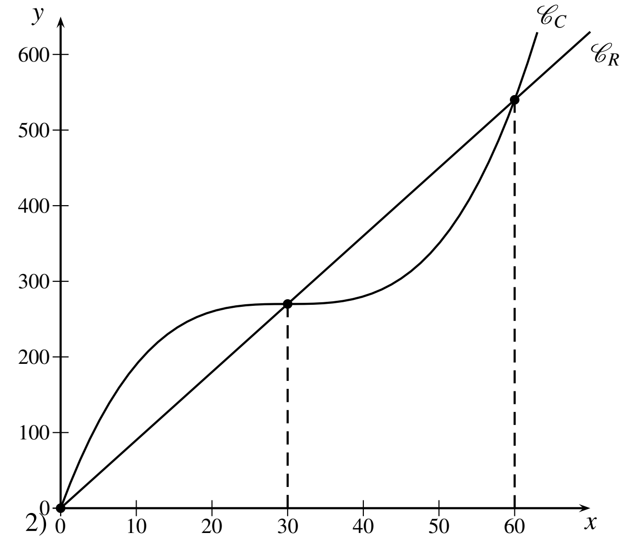
d) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. $EFCD$ étant un parallélogramme, les segments $[EC]$ et $[FD]$ ont le même milieu. B étant le milieu du segment $[FD]$ (question 2.b), c'est aussi celui du segment $[EC]$.

Exercice 3 (8 points)

1) Pour calculer la recette, on multiplie le nombre de sacs vendus, à savoir x, par le prix d'un sac, 900 €. La recette journalière, exprimée en euros, est donc $900x$.
$R(x)$ étant la recette journalière exprimée en centaine d'euros,

$$R(x) = \frac{900x}{100} = 9x.$$

2)



a) Les solutions de l'équation $C(x) = R(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_R$.
Par lecture graphique, on obtient trois solutions : 0, 30 et 60.

$$\mathscr{S} = \left\{0\ ;\ 30\ ;\ 60\right\}$$

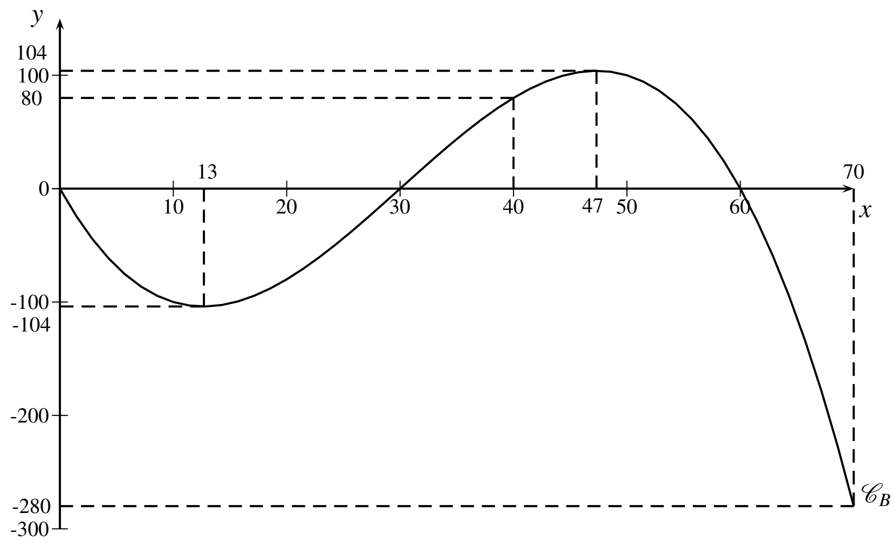
b) Les solutions de l'inéquation $R(x) < C(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_R$ situés en-dessous de $\mathscr{C}_C$.
Par lecture graphique, on obtient,

$$\mathscr{S} =]0; 30[\cup]60; 70].$$

3) Le bénéfice s'obtient en retranchant le coût de production de la recette. Ainsi,

$$B(x) = R(x) - C(x) = 9x - \left(0{,}01x^3 - 0{,}9x^2 + 27x\right) = 9x - 0{,}01x^3 + 0{,}9x^2 - 27x = -0{,}01x^3 + 0{,}9x^2 - 18x.$$

4)



a) Tableau de variation de B.

x	0	13	47	70
B	0	-104	104	-280

b) ⋆ Le minimum de B sur l'intervalle $[0; 70]$ est -280 ; il est atteint en 70.
⋆ Le maximum de B sur l'intervalle $[0; 70]$ est 104 ; il est atteint en 47.

c) Ces valeurs représentent le bénéfice maximal et la perte maximale pour l'entreprise ainsi que le nombre de sacs à produire pour les atteindre : le bénéfice maximal, obtenu pour une production de 47 sacs, se monte à 10 400€.

d) ⋆ Le minimum de B sur l'intervalle $[0; 40]$ est -104 ; il est atteint en 13.
⋆ Le maximum de B sur l'intervalle $[0; 40]$ est 80 ; il est atteint en 40.