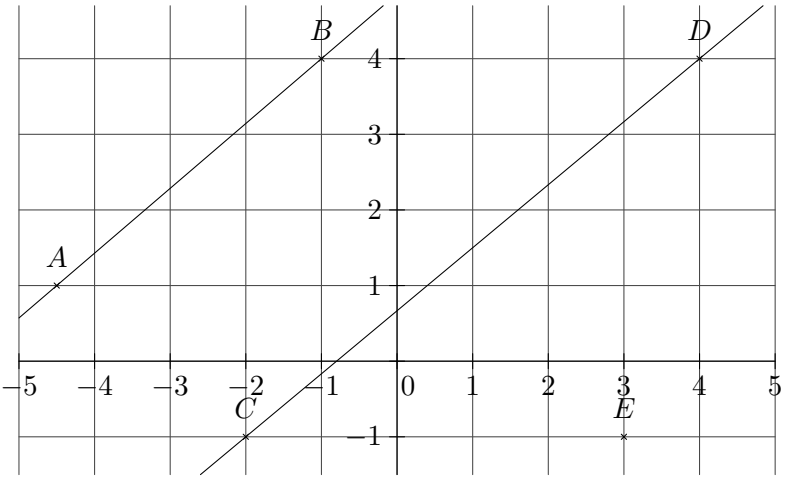
LYCÉE ALFRED KASTLER **Seconde**
2010–2011

Devoir surveillé n°08 – Mathématiques
Correction

Exercice 1

1.



2. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Or

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)\\ \overrightarrow{AB}(-1+4,5; 4-1)\\ \overrightarrow{AB}(3,5; 3)\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l}\overrightarrow{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C)\\ \overrightarrow{CD}(4+2; 4+1)\\ \overrightarrow{CD}(6; 5)\end{array}$$

Et $3,5 \times 5 - 6 \times 3 = 17,5 - 18 = -0,5 \neq 0$ $\left(\text{ou : } \dfrac{6}{3,5} \neq \dfrac{5}{3}\right)$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

3. Soit $E(x; y)$. Le quadrilatère $CBDE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE}$. Or

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{BD}(x_D - x_B; y_D - y_B)\\ \overrightarrow{BD}(4+1; 4-4)\\ \overrightarrow{BD}(5; 0)\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l}\overrightarrow{CE}(x_E - x_C; y_E - y_C)\\ \overrightarrow{CE}(x+2; y+1)\end{array}$$

Donc, en identifiant les coordonnées des deux vecteurs,

$$\left\{\begin{array}{l} x+2=5\\ y+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-2=3\\ y=0-1=-1\end{array}\right.$$

Par conséquent, E a pour coordonnées $(3; -1)$.

Exercice 2

1. On définit : $\mathcal{S}_1$: « la salle S_1 est occupée » et $\mathcal{S}_2$: « la salle S_2 est occupée ». On traduit alors l'énoncé en égalités mathématiques :
   - Les deux salles ont la même probabilité p d'être occupées, donc $\mathbb{P}(\mathcal{S}_1) = \mathbb{P}(\mathcal{S}_2) = p$.
   - La probabilité que l'une des deux salles au moins soit occupée est $\mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = 0,9$.
   - La probabilité que les deux salles soient occupées est $\mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = 0,5$.

2. On utilise la formule du cours :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = \mathbb{P}(\mathcal{S}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{S}_2) - \mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) &\Leftrightarrow 0,9 = p + p - 0,5 \\ &\Leftrightarrow 0,9 + 0,5 = 2p \\ &\Leftrightarrow \frac{1,4}{2} = p \\ &\Leftrightarrow 0,7 = p\end{aligned}$$

3. La probabilité que la salle S_1 soit vide est $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{S}_1}) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{S}_1) = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$.
4. La probabilité que les deux salles soient vides est $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2}) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = 1 - 0,9 = 0,1$.
5. La probabilité qu'une seule salle soit libre est donnée par

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) - \mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = 0,9 - 0,5 = 0,4$$

En effet, en notant $\mathcal{E}$ l'événement « une seule salle est libre », on a : $\mathcal{E} \cup (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. De plus, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ étant incompatibles,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\mathcal{E} \cup (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)) = \mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \\ \Leftrightarrow\ &\mathbb{P}(\mathcal{E}) + \mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = \mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \\ \Leftrightarrow\ &\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) - \mathbb{P}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Le bénéfice total est donné par :

$$\begin{aligned}B(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 120q - (2q^2 + 10q + 900) \\ &= 120q - 2q^2 - 10q - 900 \\ &= -2q^2 + 110q - 900 \\ &= -2(q^2 - 55q + 450)\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}-2(q-10)(q-45) &= -2(q^2 - 45q - 10q + 450) \\ &= -2(q^2 - 55q + 450) \\ &= B(q)\end{aligned}$$

3. L'entreprise est rentable lorsque $B(q) > 0$, c'est à dire lorsque $-2(q-10)(q-45) > 0$.
On a $q - 10 > 0 \Leftrightarrow q > 10$ et $q - 45 > 0 \Leftrightarrow q > 45$ donc :

x	0		10		45		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$q-10$		$-$	0	$+$		$+$	
$q-45$		$-$		$-$	0	$+$	
$B(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement, l'entreprise est rentable si la production est entre 10 et 45 articles.