

Chapitre 1

Fontions

Activité lire problème ouvert page 23 (problème ouvert de résolution à formaliser). 3
QCM page 22.

A Généralités

1 Intervalles

Définition L'ensemble de tous les nombres (entiers, décimaux, rationnels, irrationnels) est appelé ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$.

On le représente souvent à l'aide d'une droite graduée.

Dessin avec en exemple plusieurs types de nombres.

Définition Un intervalle est un ensemble de nombres réels. Il y a plusieurs types d'intervalles, mais ils ont tous en commun pour leur notation deux nombres éventuellement infinis (∞), que l'on appelle les bornes de l'intervalle, et deux crochets.

Soit a et b deux nombres réels.

- L'intervalle $]a; b[$ est un intervalle **ouvert**, ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x < b$ (a et b sont exclus).
- L'intervalle $[a; b]$ est un intervalle **fermé**, ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$ (a et b sont inclus).
- L'intervalle $]a; +\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x > a$.
- L'intervalle $] - \infty; b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \leq b$.

On définit de manière similaire des intervalles comme $[a; b[$ ou $]a; b]$ (dits semi-ouverts).

Le sens des crochets permet de signifier que le nombre est **compris** dans l'intervalle ou **exclus** de l'intervalle. L'infini n'est jamais inclu (car ce n'est pas un nombre réel).

Dessin représentant des intervalles. Appartenance.

On a $5 \in [2; 7]$ car $2 \leq 5 \leq 7$, mais $9 \notin [2; 7]$.

Voir page 27

→ Exercices 1,2,3,4p27

Définition L'union de deux intervalles est l'ensemble des nombres qui sont au moins dans l'un des deux intervalles. On utilise la notation $\cup$ pour faire l'union de deux intervalles, on la prononce « union ».

Exemple $[1; 2] \cup [2; 5]$ est l'ensemble des nombres x tels que $1 \leq x \leq 5$ et $x \neq 2$. (Dessin).

2 Fonctions

a Vocabulaire

Définition Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle ou une union d'intervalles). Définir une fonction f c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un **unique** nombre réel $f(x)$.

On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f , on le note parfois $\mathcal{D}_f$.

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x . Pour tout x de $\mathcal{D}$, l'image de x est donc unique.

Exemple On peut définir une fonction à l'aide d'une expression littérale (qui utilise la lettre x , appelée variable). Soit par exemple f , la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. C'est la fonction qui à tout nombre positif associe sa racine carrée.

On note $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

L'image de 4 par la fonction f est $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

→ Exercices 9,10,11p29

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit y un nombre réel. Un antécédent de y pour la fonction f est un nombre x tel que $f(x) = y$.

Exemple Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On a $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$. Ainsi, 2 et -2 sont tous les deux des antécédents de 4. Le nombre -4 n'a pas d'antécédent par f car pour tout nombre réel, $f(x) = x^2 \geq 0$.

Remarque l'image d'un nombre est unique, mais un nombre peut avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.

→ Exercices 15,16p31

b Représentation graphique

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. La représentation graphique de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tout x de $\mathcal{D}$. On note parfois $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}_f$ cette courbe. On associe cette courbe à l'équation $y = f(x)$ (y est l'ordonnée, x l'abscisse).

Dessin avec une image (remarquer l'unicité de l'image)

▲ Une lecture graphique des images d'une fonction ne donne que des valeurs approchées.

→ **Exercices** 6,7,8p28-29 (images)

→ **Exercices** 14,17,19p31 (antécédents)

→ **Approfondissement ou DM** 54,59,60p43 63,66,67p44

B Variations de fonctions

Activité 1p23

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est croissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est décroissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

Autrement dit, une fonction croissante est une fonction qui préserve l'ordre, alors qu'une fonction décroissante est une fonction qui change l'ordre.

Dessin

Si les inégalités entre les images de $f(a)$ et $f(b)$ sont strictes, on dit que f est strictement croissante (ou décroissante).

On peut indiquer les intervalles sur lesquels une fonction est croissante ou décroissante à l'aide d'un tableau de variations.

Courbe et tableau associés

→ **Exercices** 26,27,28,29p35

→ **Exercices** 31,32p36

On observe alors sur la courbe ou le tableau des valeurs remarquables qui peuvent correspondre à des maximums (ou maxima) ou à des minimums (ou minima).

Un extremum (maximum ou minimum) est une valeur atteinte par la fonction. Ainsi

Définition $f(a)$ est un maximum (resp. minimum) de f sur I si $f(a)$ est la plus grande (resp. petite) valeur de f sur I , c'est à dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$).

Exemple valeurs maximales de l'exemple précédent.

→ **Exercices** 34,35,36,37p38

→ **Exercices** 41,42p39 (retour à la définition générale de variation)

C Fonctions de référence

1 Fonctions affines et linéaires

Activité page 52

Définition Une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

Lorsque $b = 0$, f est une fonction **linéaire**.

Lorsque $a = 0$, f est une fonction **constante**.

Proposition La fonction affine f est représentée par la droite d'équation $y = ax + b$.

Définition Le nombre a est appelé **coefficient directeur**. Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** puisque $f(0) = b$.

Exemple courbe de $f(x) = 2x - 3$

Proposition

- Si $a > 0$, alors f est croissante.
- Si $a < 0$, alors f est décroissante.

Preuve : Dans le cas où $a < 0$: soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Alors $ax_1 > ax_2$ (le sens change car $a < 0$), et donc $ax_1 + b > ax_2 + b$. Autrement dit, $f(x_1) > f(x_2)$. Comme f change l'ordre, on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Cas où $a > 0$: exercice. □

→ **Exercices** 44,45p62 (représentation)

→ **Exercices** 48,49p62 (variations)

2 Fonction carré

Activité page 66 (manipulation d'expressions avec le carré)

Définition La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Proposition La fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet pour minimum 0 en $x = 0$.

Tableau de variations
Courbe représentative

Preuve : Prouvons que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Soit donc a et b deux réels positifs tels que $a < b$. On a $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or, $a - b < 0$ (car $a < b$) et $(a + b) > 0$ (car a et b sont positifs). Donc $a^2 - b^2 < 0$, c'est à dire $a^2 < b^2$. Ainsi la fonction carré respecte l'ordre sur $[0; +\infty[$, autrement dit elle est croissante sur $[0; +\infty[$. Sur $] -\infty; 0]$: exercice □

Définition On appelle **parabole** la courbe représentative de la fonction carré. Son extremum est appelé le **sommet** de la parabole.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, parce que $f(-x) = f(x)$, autrement dit les points $(-x; x^2)$ et $(x; x^2)$ qui sont sur la courbe sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

→ **Exercices** 17,18,19,20p72 (comparaison de carrés)

→ **Exercices** 23,27p73 (comparaisons un peu plus poussées)

→ **Exercices** 29,30p74 (résolution graphique d'inéquations avec les carrés)

3 Fonction inverse

Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$ et encore décroissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve : Exercice. □

Tableau de variation
Courbe représentative

Définition On appelle la courbe représentative de la fonction inverse une **hyperbole**

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. En effet, $f(-x) = -f(x)$, donc les points $(-x; -\frac{1}{x})$ et $(x; \frac{1}{x})$ sont sur la courbe et sont symétriques par rapport à O .

→ **Exercice** 1p91

→ **Exercices** 5,6p95 (comparaisons)

→ **Exercices** 9,10p96 (encadrements)

→ **Exercices** 15,16,17p97 (résolutions graphiques d'inéquations)

→ **Approfondissement** 52p104 (trois fonctions)

D Fonctions polynomiales de degré 2

Activité 1p67 (trajectoire d'un objet lancé, parabole sur calculatrice)

Définition Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction f dont l'expression s'écrit sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des nombres fixés, a étant non nul.

Exemple $f(x) = -2x^2 + 5$; $g(x) = x^2 - 2x + 5$.

Exemple la fonction carré est une fonction polynomiale de degré 2

Définition De même que la fonction carré, la courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2 est appelée **parabole**, formée de deux **branches** et d'un sommet.

Dessin explicatif

Proposition

- Si $a > 0$, les branches de la parabole sont vers le haut.
- Si $a < 0$, les branches de la parabole sont vers le bas.

Le sommet de la parabole est atteint pour $x = \frac{-b}{2a}$

Preuve : Ceci est admis et ne sera démontré qu'en première. □

Tableaux de variation et dessins
(préciser minimum et maximum selon le cas)

Exemple tableaux pour f et g définies plus haut

On peut observer une symétrie de la courbe par rapport à une droite verticale passant par le sommet.

→ **Exercices** 39 à 42p77

→ **Exercices** 84,85,86p83

E Fonctions homographiques

Activité 2p91 (recherche d'une longueur revenant à étudier des fonctions homographiques)

Définition On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

où a , b , c et d sont des constantes, avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Remarque la seconde condition revient à dire que le numérateur n'est pas proportionnel au dénominateur (et donc que $f(x)$ ne peut pas être simplifiée en une constante).

Exemple $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$; $g(x) = \frac{4-x}{x}$

Exemple la fonction inverse est une fonction homographique.

Proposition La fonction homographique est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$.

Preuve : Il faut en effet que $cx + d \neq 0$, donc que $x \neq -\frac{d}{c}$. □

Exemple Donner l'ensemble de définition de f et de g .

Définition De même que pour la fonction inverse, la courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.

Les variations d'une telle fonction ne sont, en seconde, pas à connaître.

→ **Exercices** 18,19,21p98

→ **Exercice** 55p104