Chapitre 1

Vecteurs

Activité 3,4p224 (parallélogrammes)
Activité 1p225 (translation et introduction des vecteurs)

A Definitions

Définition Soit A et B deux points du plan. La notation $\overrightarrow{AB}$ se dit « vecteur AB ». Il est représenté par une flèche. On dit que A est l'origine et que B est l'extrémité. Un vecteur est caractérisé par trois choses :
– Sa direction, c'est à dire celle de (AB) ;
– Son sens, celui de A vers B ;
– Sa longueur, celle de $[AB]$, à savoir AB.

Dessin

Définition Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ on appelle ce vecteur particulier le vecteur nul, et on le note $\overrightarrow{0}$.

Définition On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si les trois choses suivantes sont vérifiées :
– les directions sont les mêmes, c'est à dire $(AB)//(CD)$;
– les sens sont les mêmes (le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D) ;
– les longueurs sont les mêmes, c'est à dire $AB = CD$

De manière équivalente :

Proposition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Dessin

▲ l'ordre des points est très important !

Proposition Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et O un point. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$
C'est le point tel que $ABMO$ est un parallélogramme.
On peut dire aussi que M est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque Il est important de noter que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, l'objet $\overrightarrow{AB}$ est le même objet que $\overrightarrow{CD}$.
On peut appeler un vecteur par une seule lettre (minuscule) surmontée d'une flèche. Par exemple $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$.
On peut représenter un vecteur à plusieurs endroits du plan.

Dessin d'un vecteur et plusieurs représentants

→ **Exercices** 1,2,4p231 (utilise l'opposé d'un vecteur)

B Somme de vecteurs

Pour faire la somme de deux vecteurs, on représente ces deux vecteurs de manière que l'origine de l'un soit l'extrémité de l'autre. La somme est alors le vecteur dont l'origine est l'origine du premier et l'extrémité est l'extrémité du second.

Dessin

Pour faire la somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
À partir d'un point A on contruit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. On construit ensuite le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
Alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Cette égalité est vraie pour tous points A, B et C.
C'est ce que l'on appelle la relation de Chasles
Parfois, on souhaite faire la somme de deux vecteurs qui ont la même origine, c'est à dire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Proposition Pour tous points A, B et C du plan,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

Dessin

Preuve : Comme $ABDC$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, et donc

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

d'après la relation de Chasles. □

Définition En remarquant que quels que soient A et B, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, on dit que $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$. On le note aussi $-\overrightarrow{AB}$. On a donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

On écrit alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Dessin

→ **Exercices** 5,6,7,8p232
→ **Exercices** 43,44,46,48,49p241

C Coordonnées

Définition Dans un repère $(O; I; J)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

Figure

Exemple le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ a pour coordonnées $(0; 0)$.
On note $\overrightarrow{u}(x; y)$ pour désigner le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x; y)$. On peut aussi noter :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Proposition Les vecteurs $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ sont égaux si et seulement si

$$x = x' \text{ et } y = y'$$

Théorème Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans le repère $(O; I; J)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Preuve : Soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de M sont celles de $\overrightarrow{AB}$ par définition. De plus, $OMBA$ est un parallélogramme. Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu K.
Donc $x_K = \dfrac{x_M + x_A}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2} \Leftrightarrow x_M + x_A = x_B \Leftrightarrow x_M = x_B - x_A$.
On fait de même avec les ordonnées. □

Exemple Si $A(5; -2)$ et $B(-3; 5)$, alors $\overrightarrow{AB}(-3 - 5; 5 - (-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(-8; 7)$.
→ **Exercices** 17,13,14,16p234

Théorème Soit $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$. Alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$.

Preuve : Admis □

Exemple Soit $\overrightarrow{u}(5; -2)$ et $\overrightarrow{v}(-3; 5)$, et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Alors $\overrightarrow{w}(2; 3)$.

Remarque On a $-\overrightarrow{u}(-x; -v)$ (car $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$)
→ **Exercice** 15p234,74p243

D Produit par un nombre réel et colinéarité

Définition Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$ et λ un réel. On note $\lambda\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$.

Graphiquement, Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul, λ un réel non nul. Notons $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Alors (CD) et (AB) sont parallèles et :
- Si $\lambda > 0$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens et $CD = \lambda AB$
- Si $\lambda < 0$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire et $CD = -\lambda AB$

Figure exemple

→ **Exercices** 9,10,11p233

Proposition On a les règles de calcul suivantes :

$$\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$$

$$(\lambda + \lambda')\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda'\overrightarrow{u}$$

$$\lambda(\lambda'\overrightarrow{u}) = (\lambda\lambda')\overrightarrow{u}$$

→ **Exercices** 18,19,20,21p235

Définition On dit que deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, autrement dit si les droites qu'ils portent sont parallèles.

Nous avons vu que si $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, donc ils sont colinéaires. Nous admettrons la réciproque, et donc le théorème suivant :

Théorème $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que

$$\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

Remarque On peut prouver que deux droites sont parallèles en prouvant que deux vecteurs sont colinéaires.

Autre conséquence importante :

Proposition Soit A, B et C trois points du plan.

A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Proposition Soit $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Preuve : Cela vient du fait que les coordonnées sont colinéaires. En effet, il existe λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, autrement dit

$$x' = \lambda x \text{ et } y' = \lambda y$$

Donc (dans le cas où x et y ne sont pas nuls) $\lambda = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$, et par produit en croix :

$$x'y = xy' \Leftrightarrow xy' - yx' = 0$$

Si jamais $y = 0$ (resp. $x = 0$), alors $y' = 0$ (resp. $y = 0$) et donc $xy' - yx'$ vaut bien 0. □

→ **Exercices** 26,27,28,31p237

→ **Exercices** 65,66p242