

Chapitre 1

Probabilités

Activité page 144

Faire jeter au moins dix fois (nombre d'expériences à compter) deux dés et compter le nombre de fois où leur somme vaut 7.

A Généralités

Définition Une expérience aléatoire est un processus qui peut être répété, dont le résultat n'est pas connu à l'avance, mais dont l'ensemble des résultats possibles est bien déterminé. l'ensemble de valeurs possibles, appelé **univers**, est parfois noté E . On appelle ses éléments des **issues**.

Exemple on lance un dé. L'univers est l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple On lance deux dés et on fait la somme. L'univers est l'ensemble $\{2; 3; \dots; 12\}$.

Définition On appelle événement tout sous-ensemble de l'univers E . Un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue. On peut décrire un événement à l'aide d'une phrase.

Exemple Dans l'expérience aléatoire du jet d'un dé, on peut considérer :

- l'événement « obtenir un 2 ». Il correspond à l'ensemble $\{2\}$.
- l'événement « obtenir un nombre pair ». Il correspond) l'ensemble $A = \{2; 4; 6\}$.

Définition Soit A un événement. L'événement contraire de A , noté \bar{A} , est l'ensemble des issues de E qui ne sont pas dans A .

Exemple L'événement contraire de « obtenir un 2 » est « ne pas obtenir de 2 ». Il correspond à l'ensemble $\{1; 3; 4; 5; 6\}$.

L'événement contraire de « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair ». Il correspond à l'ensemble $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.

Définition On dit de deux événements qu'ils sont **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issue en commun.

Deux événements contraires sont donc en particulier incompatibles.

→ **Exercices** 34,35,36p159

B Loi de probabilité

Sur l'ensemble $E = \{e_1; \dots; e_n\}$, univers de l'expérience aléatoire, on veut pouvoir exprimer la fréquence d'apparition de chaque issue.

On définit alors sur E une fonction de probabilité, notée P , de sorte que :

Pour tout élément e_i de E , $P(e_i) \geq 0$ et la somme des $P(e_i)$ vaut 1 :

$$P(e_1) + \dots + P(e_n) = 1$$

Déterminer la fonction P , c'est donner la **loi de probabilité** sur E .

Définition La probabilité d'un événement A de E est la somme des probabilités des issues de A .

Exemple La somme d'obtenir un nombre pair avec un jet de dé à six faces est :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

→ **Exercices** 1,2p149, 3p150

1 Cas particulier : équiprobabilité

Dans certains cas, on estime que les probabilités de toutes les issues sont les mêmes. On dit que les issues sont équiprobables.

C'est le cas lorsque l'on considère le jet d'un « dé équilibré », ou que l'on « tire une carte **au hasard** » (le mot « hasard » dans les problèmes de probabilités signifie en principe qu'il y a équiprobabilité).

Si E contient n éléments, on a alors pour tout e_i de E la probabilité $P(e_i) = \frac{1}{n}$.

On dit que la loi est **équipartie**.

Exemple pour revenir à l'exemple précédent, on peut alors donner la probabilité dans le cas où le dé est équilibré :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Proposition On peut simplifier le calcul des probabilités dans le cas d'équiprobabilité. Soit A un événement de E dont la loi est équirépartie. Alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$$

Exemple dans notre exemple, l'événement « obtenir un nombre pair » représente l'ensemble $\{2; 4; 6\}$ qui contient 3 éléments. L'ensemble E contient lui 6 éléments.

On a donc $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Proposition Soit A un événement de E . Alors :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

→ **Exercices** 4,5,6,7,8p151

→ **Exercices** 10,11,12p153,... (arbres)