Contrôle n°02-2 – mathématiques
Correction

Exercice 1 Pour résoudre ce genre d'équations et d'inéquations, on applique **si possible** la fonction logarithme. On n'oublie pas de donner l'ensemble des solutions à la fin.

1.

$$\begin{aligned} e^{-x} = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow -x = \ln(\sqrt{2}) - \ln(2) = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}) - \ln(2) = -\frac{1}{2}\ln(2) = -\ln\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{\ln(\sqrt{2})\right\}$.

2. $e^x = -\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution car $-\dfrac{1}{2} < 0$, mais quel que soit x, $e^x > 0$. Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

3.

$$\begin{aligned} e^{x-4} \leqslant 1 &\Leftrightarrow \ln\left(e^{x-4}\right) \leqslant \ln(1) \\ &\Leftrightarrow x - 4 \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x \leqslant 4 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} =]-\infty; 4]$.

Exercice 2 Pour étudier le signe de cette fonction on résout :

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{-2x} - 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-2x} > 3 \\ &\Leftrightarrow -2x > \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{\ln(3)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, sur $\left]-\infty; -\dfrac{\ln(3)}{2}\right[$, f est positive et sur $\left[-\dfrac{\ln(3)}{2}; +\infty\right[$, f est négative.

Exercice 3 Pour démontrer chaque égalité il y a plusieurs méthodes.

1.

$$\begin{aligned} \frac{4}{1+e^{-t}} = \frac{4e^t}{1+e^t} &\Leftrightarrow 4(1+e^t) = (1+e^{-t})4e^t \text{ (produit en croix)} \\ &\Leftrightarrow 4 + 4e^t = 4e^t + 4e^{-t}e^t \\ &\Leftrightarrow 4 + 4e^t = 4e^t + 4e^{-t+t} \\ &\Leftrightarrow 4 = 4e^0 \text{ (on soustrait } 4e^t\text{)} \\ &\Leftrightarrow 4 = 4 \end{aligned}$$

La dernière égalité étant évidemment vraie, la première l'est et est ainsi démontrée.

Autre méthode (ne pas oublier les parenthèses, et de multiplier numérateur **et** dénominateur) :

$$\frac{4}{1+e^{-t}} = \frac{4e^t}{(1+e^{-t})e^t} = \frac{4e^t}{e^t+e^{-t}e^t} = \frac{4e^t}{e^t+e^{-t+t}} = \frac{4e^t}{e^t+e^0} = \frac{4e^t}{e^t+1}$$

2. Soit on voit une forme a^2-b^2 que l'on peut factoriser :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\\
&= \frac{2e^{-x}}{2}\times\frac{2e^x}{2}\\
&= e^{-x}e^x\\
&= e^{-x+x}\\
&= e^0\\
&= 1
\end{aligned}$$

Soit on voit les formes $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ que l'on développe :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}\right)-\left(\frac{(e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}\right)\\
&= \left(\frac{e^{2x}+2e^{x-x}+e^{-2x}}{4}\right)-\left(\frac{e^{2x}-2e^{x-x}+e^{-2x}}{4}\right)\\
&= \frac{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^0+e^{-2x})}{4}\\
&= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}\\
&= \frac{2+2}{4}\\
&= 1
\end{aligned}$$