Devoir maison n°06 – mathématiques
Donné le 12/12/2011 – à rendre le 03/01/2012

Exercice 1

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}$.

1. Étudier les variations de g sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x^2(\ln(x) - 1) + 2$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
3. (a) Montrer que, dans $[2; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
   (b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Exercice 2 Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.

1. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par :

$$B(x) = 1{,}5x - x^2 + 2x\ln(x).$$

   Calculer $B(2)$ et en donner une interprétation.
2. On suppose que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0{,}25\ ;\ 5]$ et on note B' sa fonction dérivée. Calculer $B'(x)$.
3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction B', dérivée de la fonction B, sur l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$:

x	0,25		1		5
$B'(x)$			1,5		
		↗		↘	
	y_1				y_2

   On précise les encadrements : $0{,}22 < y_1 < 0{,}23$ et $-3{,}29 < y_2 < -3{,}28$.
   (a) Démontrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $2{,}77$ *pour valeur approchée de* α.
   (b) Dresser le tableau précisant le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$.
4. Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ? (On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres). Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.