Devoir maison n°09 – mathématiques
Donné le 12/03/2012 – à rendre le 19/03/2012

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ par

$$f(x) = ax + b - \frac{16}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle. La courbe représentative de f, donnée ci-dessous, coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 4 et admet une tangente horizontale au point A de coordonnées $(2\,;\,4)$.

1. (a) Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f'(2)$.
   (b) En utilisant deux des quatre résultats de la question 1. a., déterminer les valeurs des réels a et b.
2. On admet que la fonction f est définie sur $[1\,;\,6]$ par $f(x) = -4x + 20 - \dfrac{16}{x}$.
   (a) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ en précisant uniquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.
3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ par $F(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln x$.
   (a) Montrer que F est la primitive de la fonction f sur $[1\,;\,6]$ telle que $F(1) = 0$.
   En utilisant les résultats des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction F sur l'intervalle $[1\,;\,6]$, les valeurs seront arrondies au millième.