LYCÉE ALFRED KASTLER **TES**
2011–2012

Devoir surveillé n°02 – mathématiques
30/11/2011

Exercice 1 (5 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x - 19$$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau complet des variations de f.
5. Démontrer qu'il existe une unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-3; -2]$.
6. Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
7. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de α.

Exercice 2 (4 points) Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 6[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 6[$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne le tableau de variations de la fonction f ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		1		6
f	1	↘	0	↗	5	↘	$-\infty$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant la réponse.

1. Pour tout nombre de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a $f'(x) \geqslant 0$.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.
3. La droite d'équation $y = 5$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. Soit e une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to -\infty} e(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e(x) = +\infty$$

Si h est la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 6[$ par $h(x) = e(f(x))$, on a $\lim_{x \to 6} h(x) = +\infty$.

Exercice 3 (5 points) *Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième et donnés sous forme décimale.*

Jade est une jeune cavalière qui participe régulièrement à des concours d'obstacles.
À chaque concours, sa monitrice met à sa disposition l'un des trois chevaux du club.
A l'issue de chaque concours, elle a noté sur une fiche le nom de sa monture ainsi que la performance qu'elle a réalisée.
L'examen de la collection de fiches ainsi constituée a permis à Jade de constater que :

- Six fois sur dix, elle a monté Cacahuète, une vieille jument docile mais qui fait souvent tomber les barres d'obstacle. Lorsqu'elle a monté Cacahuète, Jade a réussi son parcours deux fois sur cinq.
- Trois fois sur dix, elle a monté la jeune jument Tornade. C'est une jument performante mais difficile à maitriser. Lorsque Jade l'a montée, elle a réussi son parcours une fois sur deux.
- Lors des autres concours, Jade a monté le courageux et régulier Abricot et avec lui, elle a réussi son parcours quatre fois sur cinq.

Jade prend au hasard une fiche parmi sa collection. On s'intéresse au nom du cheval et au résultat du concours mentionnés sur la fiche.
On note :

- C l'événement « Jade montait Cacahuète. »
- T l'événement « Jade montait Tornade. »
- A l'événement « Jade montait Abricot. »
- R l'événement « Jade a réussi son parcours. »
- $\overline{\text{R}}$ l'événement « Jade n'a pas réussi son parcours. »

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'événement : « Jade montait Abricot et a réussi son parcours ».
   Calculer la probabilité de l'événement : « Jade montait Cacahuète et a réussi son parcours ».
3. Montrer que la probabilité de l'événement : « Jade a réussi son parcours » est égale à 0,47.
4. Sachant que Jade a réussi son parcours, quelle est la probabilité que ce jour là elle ait monté Tornade ?
5. Sachant que Jade n'a pas réussi son parcours, quelle est la probabilité que ce jour là elle ait monté Abricot ?

Exercice 4 (5 points) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{-2x^3+3x^2+8x-7}{x^2-4}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. On considère dans la suite que g n'est définie que sur $]-\infty;-2[\cup]-2;0]$.
   Déterminer la ou les limite(s) de g en -2.
3. En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera l'équation.
4. Démontrer que pour tout $x \in]-\infty;-2[$, $g(x) = -2x+3+\dfrac{5}{x^2-4}$.
5. Démontrer alors que $\mathcal{C}_g$, courbe représentative de g, admet la droite Δ d'équation $y=-2x+3$ pour asymptote en $-\infty$.
6. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_g$ par rapport à Δ sur $]-\infty;-2[$ puis sur $]-2;0]$.