LYCÉE ALFRED KASTLER **TES**
2011–2012

Devoir surveillé n°04 – mathématiques
10/12/2012

Exercice 1 (7 points) Grâce à un système de détecteur, une borne de péage automatique peut délivrer des tickets à deux hauteurs différentes selon le véhicule détecté afin que le conducteur ne soit pas obligé de sortir pour le saisir :

- s'il s'agit d'une voiture, d'une moto ou d'une camionnette, le ticket sort en bas ;
- s'il s'agit d'un camion, le ticket sort en haut.

La société d'autoroute a modélisé le fonctionnement défectueux du détecteur de l'une de ces bornes :

- lorsqu'un camion passe, il n'est correctement détecté que deux fois sur trois ;
- lorsqu'un autre type de véhicule passe, son conducteur est contraint d'en sortir pour saisir son ticket une fois sur quatre.

On estime qu'à cette borne de péage 60 % des véhicules sont des camions. On considère les événements suivants :

- C : « Le véhicule qui se présente est un camion »
- H : « Le ticket sort en haut »
- B : « Le ticket sort en bas ».

1. Donner la probabilité $P_{\text{C}}(\text{H})$.
2. Construire un arbre probabiliste (pondéré) présentant la situation.
3. Calculer la probabilité que le ticket sorte en haut.
4. Montrer que la probabilité qu'un conducteur ne soit pas obligé de sortir de son véhicule pour saisir le ticket vaut 0,7.

Exercice 2 (7 points) Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2 500.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0,5 ; 25] par :

$$f(x) = 18\ln x - x^2 + 16x - 15$$

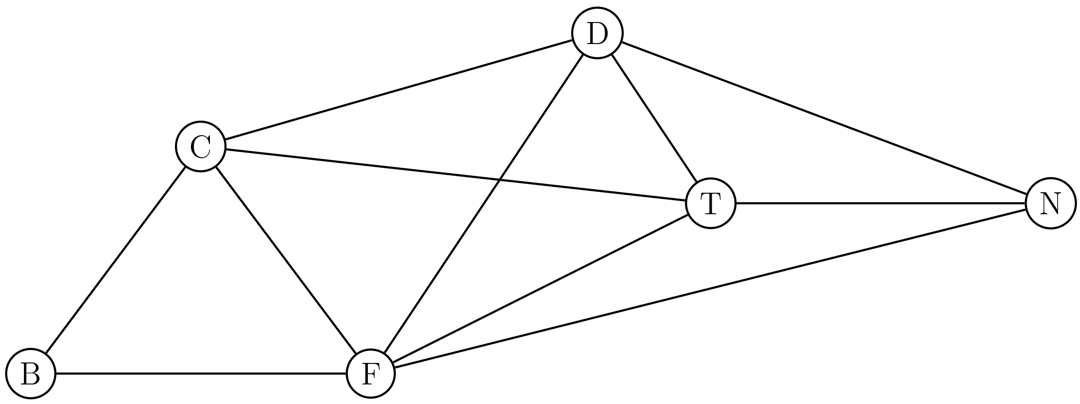
Si x représente le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, alors on admet que $f(x)$ représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers d'euros.
On suppose que f est dérivable sur [0,5 ; 25], et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 25], on a $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 16x + 18}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0,5 ; 25]. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 25].
3. (a) Calculer $f(1)$.
   (b) On admet que sur l'intervalle [18 ; 19] l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [0,5 ; 25].
4. Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire ?

Exercice 3 (6 points - élèves ne suivant pas la spécialité)
Pour chacune des deux fonctions ci-dessous, définies sur $]0;+\infty[$:
– Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$;
– Calculer la dérivée.

1. $f(x) = x^2\ln(x) + 5x + 2$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln(x) - 5x}{x^2}$.

Exercice 3 (6 points - élèves suivant la spécialité)
Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes. On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



1. (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

   (b) Justifier que le graphe est connexe.
2. Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin. Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.
3. Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe. On admet que $4 \leq n \leq 6$.
   Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.