DEVOIR DE TYPE BAC
02 mars 2012

MATHÉMATIQUES

Série ES

ENSEIGNEMENT
OBLIGATOIRE & DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
L'exercice 2 possède deux versions : une version pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et une autre pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. Les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité devront composer l'exercice 2 sur une copie qui sera rendue séparément à la fin de l'épreuve.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.**

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien ?? pages numérotées de 1/?? à ??/??.
La feuille de papier millimétré fournie sera à rendre dans la copie.**

Exercice 1 (5 points) Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer cette réponse sur la copie.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point.*
L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Augmenter une quantité de 8 %, puis la diminuer de 8 % c'est :
   (a) revenir à la quantité initiale
   (b) augmenter la quantité initiale de 0,64 %
   (c) diminuer la quantité initiale de 0,64 %
2. Le relevé des ventes de chaussures d'homme dans un magasin, en fonction des pointures, est le suivant :

Pointure	40	41	42	43	44	45	46
Nombre de paires vendues	10	12	15	13	5	5	1

   La médiane de cette série est égale à :
   (a) 13
   (b) 42
   (c) 43
3. Pour tout nombre réel a strictement positif, le nombre $\ln\left(a^2+3a\right)$ est égal à
   (a) $\ln\left(a^2\right)+3\ln(a)$
   (b) $\ln(a)+\ln(a+3)$
   (c) $2\ln(a)+\ln(3a)$
4. L'inéquation $\ln(1-x)\leq 1$ est équivalente à :
   (a) $x \geq 1-e$
   (b) $x \in [1-e; 1[$
   (c) $x \leq e-1$
5. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=2x+\ln\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$.
   On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; I; J)$.
   La courbe C admet pour asymptote la droite d'équation :
   (a) $y=0$
   (b) $y=2x-\ln 2$
   (c) $y=2x$.

Exercice 2 (5 points ; Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)
Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio ;
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :

T l'événement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\overline{T}$ son événement contraire ;

B l'événement « le ménage consomme des produits bio » et $\overline{B}$ son événement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale

1. (a) Donner sans justification la probabilité $p(T)$ de l'événement T.
   (b) Donner sans justification $p_T(B)$ et $p_{\overline{T}}(B)$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. (a) Calculer la probabilité de l'événement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».
   (b) Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.
4. Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième).
5. Les événements T et B sont-ils indépendants ? Justifier.
6. Calculer la probabilité de l'événement $T \cup B$ puis interpréter ce résultat.
7. Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).
   Soit S la somme d'argent reçue par un ménage.
   (a) Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre S ? (on n'attend pas de justification).
   (b) Donner la loi de probabilité de S.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

Exercice 2 (5 points ; Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

La société « Vélibre », spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs. Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

- de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année ;
- de revendre 20% des vélos les plus usagés en janvier de chaque année.

1. Pour tout nombre entier naturel n, on modélise le nombre approximatif de vélos du parc en janvier de l'année $2010 + n$ par les termes de la suite (U_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$U_{n+1} = 0{,}8U_n + 40 \qquad \text{et} \qquad U_0 = 150$$

   Vérifier que U_1 correspond bien au nombre prévu de vélos du parc pour janvier 2011.

2. Pour connaître l'évolution du nombre approximatif de vélos du parc, le directeur utilise un tableur. Voici un extrait de sa feuille de calcul :

	A	B	C	D	E
1	Valeur de n	Valeur de U_n		Valeur de n	Valeur de U_n
2	0	150		18	199,10
3	1	160		19	199,28
4	2	168		20	199,42
5	3	174,4		21	199,54
6	4	179,52		22	199,63
7	5	183,62		23	199,70
8	6	186,89		24	199,76
9	7	189,51		25	199,81
10	8	191,61		26	199,85
11	9	193,29		27	199,88
12	10	194,63		28	199,90
13	11	195,71		29	199,92
14	12	196,56		30	199,94

   (a) Conjecturer le sens de variation de la suite (U_n).

   (b) Quelle semble être la limite de la suite (U_n) ?

3. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 200$.

   (a) Prouver que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,8. Déterminer son premier terme.

   (b) En déduire, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction du nombre entier n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

   (d) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = 10 \times 0{,}8^n$.

   (e) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

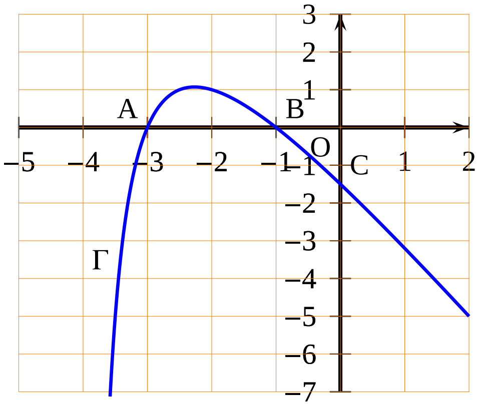
   La municipalité prévoit d'implanter de nouvelles bornes dans la ville afin d'offrir aux usagers 250 emplacements. La société « Vélibre » pourra-t-elle satisfaire cette demande ? Argumenter la réponse.

5. Finalement, la municipalité change de stratégie, on obtient une suite (T_n) modélisant le nombre approximatif de vélos en janvier de l'année $2010 + n$ définie par : $T_n = 260 - 50 \times 0{,}9^n$.

   Résoudre $260 - 50 \times 0{,}9^n = 250$. En quelle année la municipalité pourra-t-elle offrir aux usagers 250 emplacements ?

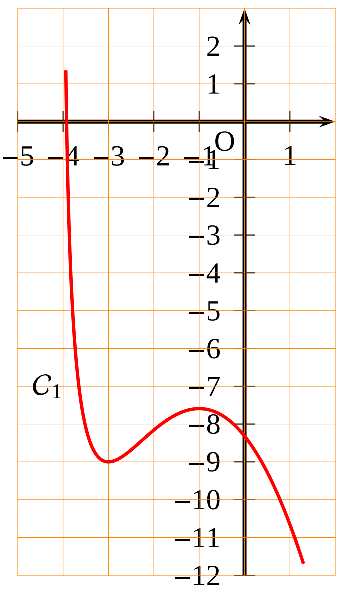
Exercice 3 (5 points)

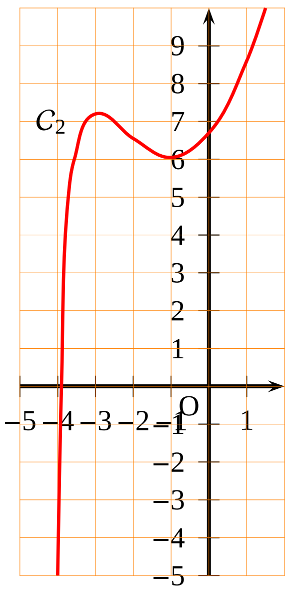
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$.
On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$.
La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal de f', la fonction dérivée de f sur $]-4\ ;\ +\infty[$.
Cette courbe Γ passe par les points A$(-3\ ;\ 0)$, B$(-1\ ;\ 0)$ et C$(0\ ;\ -1{,}5)$.

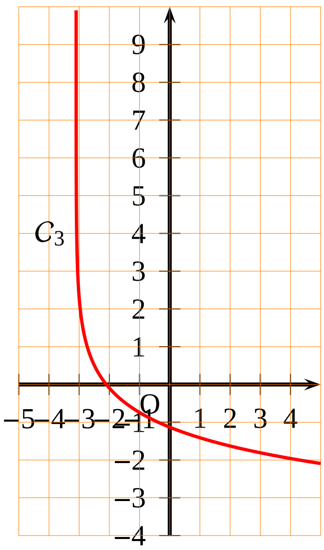


Partie A

1. À l'aide de la représentation graphique de la fonction dérivée f', déterminer $f'(0)$ et $f'(-3)$.
2. Trois courbes sont présentées ci-dessous. Une seule de ces trois courbes peut représenter la fonction f.
Déterminer laquelle des trois représentations graphiques ci-dessous est celle de la fonction f, en justifiant votre réponse :







Partie B

On suppose qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) = ax^2 + b\ln(x+4)$.

1. (a) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.
   (b) Déduire des questions précédentes que $a = -1$ et $b = -6$
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   (b) Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-4 ; +\infty[$.
   (c) Établir alors le tableau de variations complet de la fonction f.

Exercice 4 (5 points) Le tableau ci-dessous donne le taux d'équipement en lave-vaisselle des ménages français, de 1975 à 1993.

Année	1975	1980	1985	1990	1993
x_i : rang de l'année	0	5	10	15	18
y_i : taux en %	8,4	16,5	23,1	30,0	33,6

(Source : INSEE)

Par exemple : 8,4 % des ménages français ont un lave-vaisselle en 1975.
Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé. Les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ; ils seront arrondis à 10^{-3} *près.*
Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unité graphique : 0,5 cm par année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 3 % sur l'axe des ordonnées.

1. (a) Représenter le nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$. On utilisera une feuille de papier millimétré.
   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique et le placer sur le dessin précédent.
2. (a) Un ajustement affine vous semble-t-il justifié ? Expliquer.
   (b) Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Représenter (D) sur le dessin précédent.
3. On suppose dans cette question que le modèle obtenu à la question **2.** reste valable pour les années suivantes.
   (a) Calculer le taux d'équipement en lave-vaisselle que l'on peut prévoir en 2002.
   (b) En quelle année ce taux dépasserait-il 50 % ? Déterminer l'année par le calcul.
   Expliquer comment on peut retrouver graphiquement ce résultat.