LYCÉE ALFRED KASTLER | **TES**
2011–2012

Devoir surveillé n°06 – mathématiques
23/04/2012

Exercice 1 (15 points)

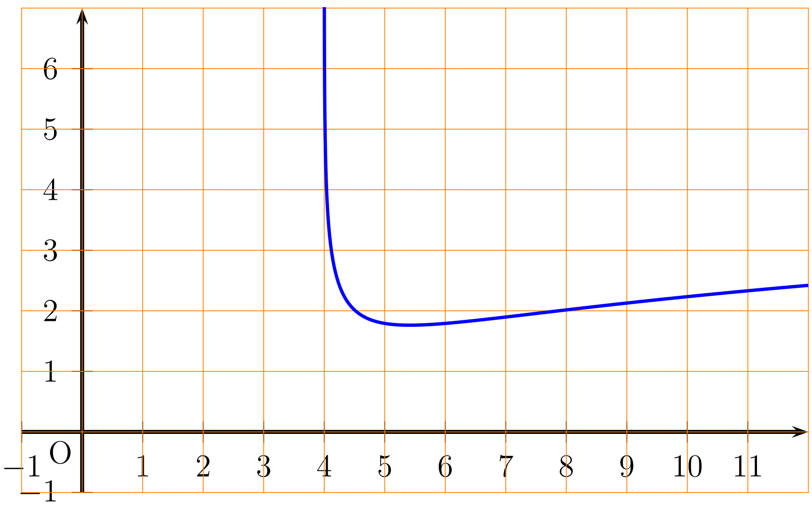
Partie A

Soit u la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 4[\cup]4\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-4}$.

1. Donner le signe de x^2-5x+6 pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. En déduire le signe de $u(x)$ pour tout x de $]-\infty\ ;\ 4[\cup]4\ ;\ +\infty[$.
3. Factoriser x^2-5x+6.

Partie B

1. En utilisant la partie A, expliquer pourquoi la fonction f telle que $f(x) = \ln\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-4)}$ peut être définie pour $x \in]4\ ;\ +\infty[$.
2. Une représentation graphique de la fonction f figure ci-dessous.



   Utiliser cette représentation graphique pour déterminer une valeur approchée, arrondie à l'entier le plus proche, du nombre $\mathcal{A} = \displaystyle\int_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   On expliquera la démarche.

3. Soient i, j et k les fonctions définies sur $]4\ ;\ +\infty[$ par :
   - $i(x) = \ln(x-2)$
   - $j(x) = \ln(x-3)$
   - $k(x) = \ln(x-4)$

   (a) Vérifier que la fonction I définie sur $]4\ ;\ +\infty[$ par $I(x) = (x-2)\ln(x-2) - x$ est une primitive de la fonction i sur $]4\ ;\ +\infty[$.

   (b) On admet que la fonction J définie sur $]4\ ;\ +\infty[$ par
   $J(x) = (x-3)\ln(x-3) - x$ est une primitive de la fonction j sur $]4\ ;\ +\infty[$ et que la fonction K définie par $K(x) = (x-4)\ln(x-4) - x$ est une primitive de la fonction k sur $]4\ ;\ +\infty[$.
   Pour $x \in]4\ ;\ +\infty[$, exprimer $f(x)$ à l'aide de $i(x)$, $j(x)$ et $k(x)$.

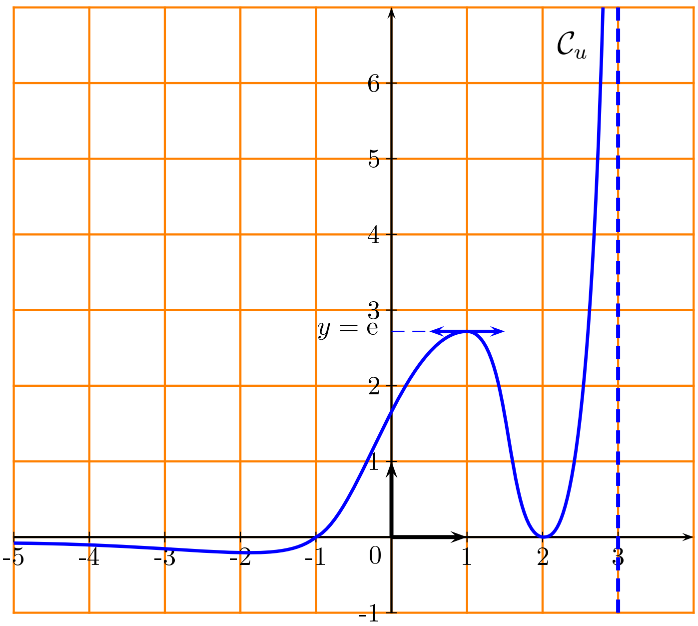
(c) En déduire l'expression d'une primitive F de la fonction f sur $]4\ ;\ +\infty[$.

4. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis donner la valeur arrondie au centième.

Exercice 2 (5 points – Élèves ne suivant pas la spécialité)

Soit u une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3[$. On note u' la dérivée de u. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_u$ représentant la fonction u. L'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$ sont deux asymptotes à $\mathcal{C}_u$. La droite d'équation $y = \mathrm{e}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_u$ en son point d'abscisse 1. La courbe $\mathcal{C}_u$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 et lui est tangente au point d'abscisse 2.

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]-1\ ;\ 2[$ telle que $f = \ln(u)$. On note f' sa fonction dérivée.



Cet exercice est un « Vrai-Faux ». Voici cinq affirmations. Pour chacune d'entre elles, indiquer si elle est vraie ou fausse. On ne demande aucune justification. Chaque bonne réponse apporte 1 point.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 3} u(x) = +\infty$.
2. Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, f change de signe.
3. $f'(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. L'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution.
5. $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = 0$.

Exercice 2 (5 points – Élèves suivant la spécialité)

Pour chacune des quatre questions suivantes numérotées de 1 à 4, une et une seule des trois propositions a, b, c est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition exacte. Aucune justification n'est attendue.

1. La matrice ci-dessous est celle d'un graphe non orienté G, de sommets A, B, C, D, E.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Le graphe G est complet.

   (b) Le graphe G comporte 12 arêtes.

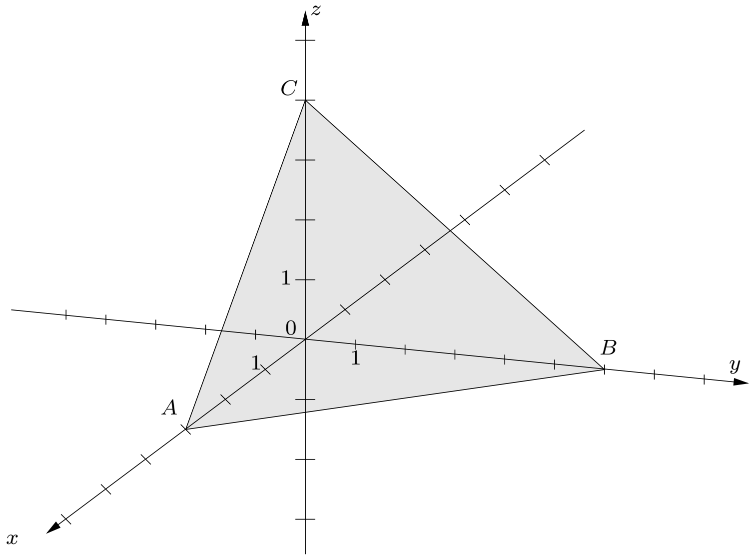
   (c) Le graphe G admet une chaîne eulérienne.

2. Le plan (ABC), dessiné ci-dessous dans un repère de l'espace, a pour équation :

(a) $4x + 2y + 2z = 12$

(b) $8x + 4y + 6z = 24$

(c) $3x + 6y + 4z = 12$



3. Dans un repère de l'espace, le plan (P) d'équation $5y - z + 7 = 0$ est parallèle à l'axe :

(a) des abscisses (b) des ordonnées (c) des cotes

4. Dans un repère de l'espace, l'intersection de la surface S d'équation $z = xy$ et du plan (Q) d'équation $z = 2$ est :

(a) une droite (b) une parabole (c) un point

5. On considère la surface S d'équation $z = y \times \ln(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0{,}5; 5]$ et y appartient l'intervalle $[-3; 5]$. Cette surface S est représentée ci-dessous. Les coordonnées du point B sont :

(a) $(4; 2; 3{,}01)$ (b) $(4{,}5; 2; 3)$ (c) $(4{,}5; 2{,}5; 3)$