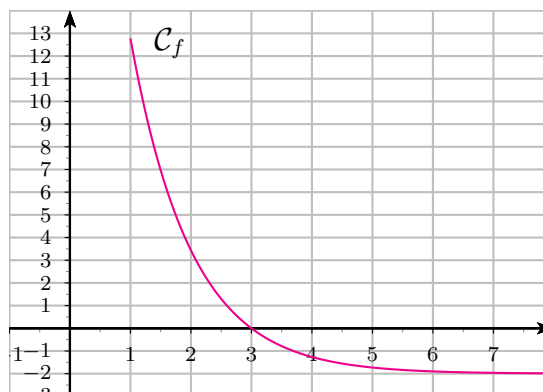


Devoir surveillé n°07 – mathématiques
23/05/2012

Exercice 1 (5 points – Commun à tous les candidats)

La courbe \mathcal{C}_f ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie, dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
La courbe \mathcal{C}_f passe par le point de coordonnées $(3 ; 0)$; on sait de plus que la droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f .



1^{re} partie Étude préliminaire de f

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.

1. Donner la limite de f en $+\infty$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3. Préciser le signe de f sur $[1 ; +\infty[$.

2^e partie Étude d'une fonction composée

Pour cette partie, des justifications sont attendues.

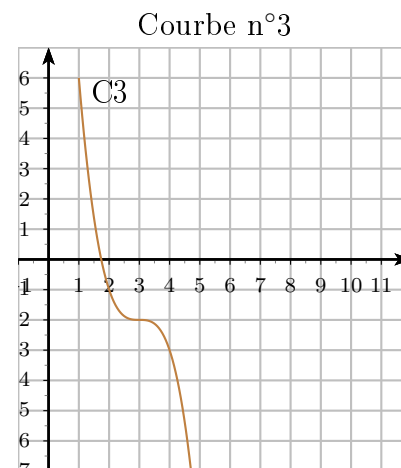
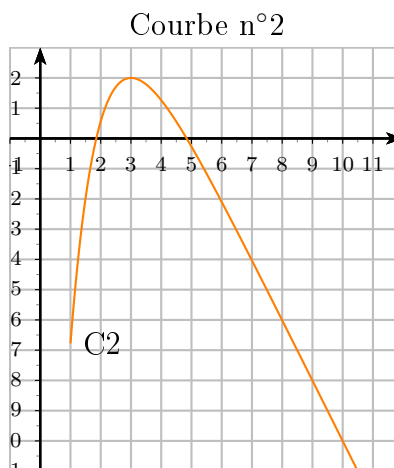
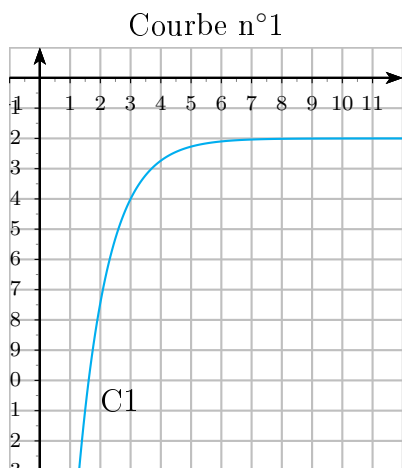
Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = \exp(f(x))$.

1. Déterminer la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Résoudre sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 1$.

3^e partie

La fonction f est la dérivée d'une fonction F définie sur $[1 ; +\infty[$.

1. La fonction F est représentée sur l'une des 3 courbes données ci-dessous. Préciser laquelle, en justifiant votre réponse.



2. Déterminer graphiquement $F(2)$ et $F(3)$ avec la précision permise par le graphique.

3. On s'intéresse au domaine du plan délimité par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$. On notera A l'aire de ce domaine, exprimée en unités d'aire.

Donner une méthode permettant de déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine précédemment défini et en donner une estimation.

4^e partie

On donne l'expression de la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2e^{-x+3} - 2.$$

Calculer l'aire A du domaine (en unités d'aire); on donnera la valeur exacte à l'aide du réel e , puis l'arrondi au centième.

Exercice 2 (6 points – Commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3$$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. (a) Démontrer que pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}.$$

- (b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. (a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3$.

- (b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0).$$

- (c) Interpréter graphiquement cette limite.

3. À l'aide des questions 1. et 2., dresser le tableau de variation de la fonction f .

4. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue. Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :

pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5 ; 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

Chaque réponse sera justifiée.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.

2. (a) Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?
- (b) Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

3. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.
On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.
Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

Exercice 3 (4 points – Commun à tous les candidats)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $] -\infty ; 6[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 6[$ et \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

On donne le tableau de variations de la fonction f ci-dessous.

x	$-\infty$	-2	1	6
f	1	\searrow	\nearrow	5
	\searrow	\nearrow	\searrow	$-\infty$
		0		

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant la réponse.

1. Pour tout nombre de l'intervalle $] -\infty ; 1]$, on a $f'(x) \geq 0$.
2. La courbe \mathcal{C}_f admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.
3. La droite d'équation $y = 5$ est tangente à la courbe \mathcal{C}_f .
4. Si h est la fonction définie sur $] -\infty ; 6[$ par $h(x) = e^{f(x)}$, on a $\lim_{x \rightarrow 6} h(x) = -\infty$.

Exercice 4 (5 points – Candidats n'ayant pas suivi la spécialité)

Un fournisseur d'accès internet effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2 000 clients, dont l'abonnement a plus de 12 mois d'ancienneté.

Parmi eux :

- 900 n'ont jamais subi de coupure prolongée de connexion.
- 500 clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion dans les 12 derniers mois.
- les autres clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an.

L'enquête révèle que :

- 95 % des clients n'ayant jamais subi de coupure prolongée se déclarent satisfaits du service fourni.
- 50 % des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion dans les douze derniers mois se déclarent satisfaits du service fourni.
- 70 % des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an se déclarent satisfaits du service fourni.

On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont été interrogés. On considère les événements suivants :

J : « le client n'a jamais subi de coupure prolongée de connexion »

R : « la dernière coupure prolongée de connexion du client est survenue au cours des douze derniers mois » (elle est « récente »)

A : « la dernière coupure prolongée de connexion du client date d'il y a plus d'un an » (elle est « ancienne »)

S : « le client se déclare satisfait »

\bar{S} désigne l'évènement contraire de S .

1. (a) Calculer les probabilités des évènements J, R et A .
(b) Construire un arbre pondéré décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le client soit satisfait et n'ait jamais subi de coupure prolongée de connexion.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisi se déclare satisfait est égale à 0,762 5.
4. Le client choisi se déclare satisfait du service fourni. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une coupure prolongée de connexion au cours des douze derniers mois (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième) ?
5. On choisit au hasard trois clients parmi ceux du panel interrogé durant l'enquête. On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
Déterminer la probabilité qu'exactly un des clients choisis se déclare non satisfait du service fourni (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).