LYCÉE ALFRED KASTLER **TES**
2011–2012

Devoir surveillé n°07 – mathématiques
Correction

Exercice 1
1ère partie
Par simple lecture graphique on obtient :

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$ (on sait qu'il y a une asymptote).
2. $f(x) = 0$ a pour solutions $\mathcal{S} = \{3\}$ car $f(3) = 0$ (le point $M(3;0)$ est sur la courbe).
3. $f(x) > 0$ pour $x \in [1;3[$ puis $f(3) = 0$ et enfin $f(x) < 0$ pour $x \in]3;+\infty[$.

2e partie
On a $g = e^f$.

1. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to+\infty} e^{f(x)} = e^{-2}$.
2. On a :

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\Leftrightarrow e^{f(x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow f(x) = \ln(1) \quad \text{(on applique le logarithme)} \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

3e partie

1. On a $F' = f$, autrement dit F est une primitive de f, ou f est la dérivée de F. Le signe de f donne donc les variations de F. Il faut ainsi que F soit croissante sur $[1;3]$ puis décroissante sur $[3;+\infty[$. La seule courbe qui correspond est la courbe n° 2.
2. Graphiquement, $F(2) \simeq 0{,}5$ et $F(3) = 2$.
3. Pour calculer l'aire en question, on doit calculer :

$$\int_2^3 f(x)dx = [F(x)]_2^3 = F(3) - F(2) \simeq 2 - 0{,}5 \simeq 1{,}5$$

4e partie
Puisque $f(x) = 2e^{-x+3} - 2$,

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_2^3 (2e^{-x+3} - 2)dx \\ &= \left[2 \times \frac{1}{-1}e^{-x+3} - 2x\right]_2^3 \\ &= -2e^{-3+3} - 2\times 3 - (-2e^{-2+3} - 2\times 2) \\ &= -2 - 6 + 2e + 4 \\ &= 2e - 4 \\ &\simeq 1{,}44 \end{aligned}$$

La valeur est légèrement inférieure à l'approximation donnée plus haut.

Exercice 2

Partie A

On nous donne $f(x) = (-4x^2 + 5)\,\mathrm{e}^{-x} + 3$ pour $x \geqslant 0$.

1. (a) Soit $g : x \mapsto (-4x^2+5)e^{-x}$. g est de la forme uv avec $u(x) = -4x^2+5$, donc $u'(x) = -8x$ et $v(x) = e^{-x}$, donc $v'(x) = -e^{-x}$.
   Par suite, $f' = g' = u'v + uv'$, donc

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -8xe^{-x} - (-4x^2+5)e^{-x} \\ & = & (4x^2 - 8x - 5)e^{-x} \quad \text{(en factorisant par } e^{-x}) \end{array}$$

   (b) Puisque $e^{-x} > 0$ quel que soit x, le signe de $f'(x)$ est celui de $4x^2 - 8x - 5$. Cette expression est polynomiale de degré 2. On calcule :
   $\Delta = 64 + 4 \times 20 = 144 = 12^2 > 0$ Il y a donc deux racines,

$$x_1 = \frac{8-12}{8} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{8+12}{8} = \frac{5}{2}$$

   Comme $a = 4 > 0$, on a donc (on étudie le signe de f sur $[0;+\infty[$:
   $f'(x) > 0$ si $x > \dfrac{5}{2}$ et $f'(x) < 0$ si $x \in \left[0; \dfrac{5}{2}\right[$.

2. (a) Puisque $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, on a

$$f(x) = -4x^2e^{-x} + 5e^{-x} + 3 = -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3$$

   (b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{e^x} = 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$, on a également $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4x^2}{e^x}$. Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

   (c) Cela signifie que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty[$.

3. Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \frac{5}{2} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline & 8 & & & & 3 \\ f & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & \simeq 1{,}36 & & \end{array}$$

4. Sur l'intervalle $\left[\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions car f y est stricement croissante et a pour limite 3 en $+\infty$, qui n'est donc jamais atteinte. Sur $\left[0; \dfrac{5}{2}\right]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus, $f(0) = 8 > 3$ et $f\left(\dfrac{5}{2}\right) \simeq 1{,}36 < 3$. On peut alors affirmer d'après le théorème des valeurs intermédaires que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $\left[0; \dfrac{5}{2}\right]$, et donc dans $[0;\ +\infty[$.
   La valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près est 1,12.

Partie B

1. Comme l'unité est en hectolitres, le coût moyen unitaire est donné par $f(5) \simeq 2{,}36$, ce qui fait 236 euros environ.
2. (a) Le coût minimum se trouve en minimisant la valeur de $f(x)$. Or, le minimum de f est atteint pour $x = \dfrac{5}{2}$ comme nous l'avons vu, donc pour 250 litres, et le coût moyen unitaire est alors donné par $f(\dfrac{5}{2}) \simeq 1{,}36$, donc 136 euros.

   (b) Le coût unitaire minimum (136 euros) étant supérieur au prix de vente (100 euros), l'entreprise ne peut pas réaliser de bénéfice.
3. Si le prix unitaire de vente est de 300 euros, alors l'entreprise réalise des bénéfices en vendant x hectolitres si $f(x) < 3$. Graphiquement, grâce aux variations de f, cela revient à $x > x_0$, x_0 étant la solution de l'équation $f(x) = 0$. Le seuil de rentabilité est donc environ de 112 litres d'après la partie A.

Exercice 3

1. Faux : La fonction f étant décroissante sur $]-\infty; -2]$, on a par exemple $f'(-3) < 0$, donc l'affirmation est fausse.
2. Vrai : Puisque $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = -\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet effectivement une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées (verticale) ; elle a pour équation $x = 6$.
3. Vrai : La fonction admet un maximum local en $x = 1$, et $f(1) = 5$. Comme f est dérivable, cela signifie que $f'(1) = 0$, et par suite que $\mathcal{C}_f$ admet effectivement la droite (horizontale) d'équation $y = 5$ pour tangente.
4. Faux : Comme $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to 6} e^{f(x)} = 0$, et non pas $-\infty$ (d'autre part, une exponentielle étant toujours positive, une limite négative est tout à fait impossible).

Exercice 4

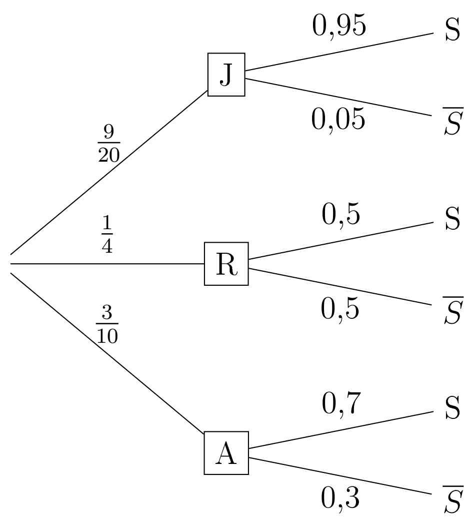
1. (a) Le client étant choisi au hasard, la loi est équirépartie, et par suite :

$$P(J) = \frac{900}{2\ 000} = \frac{9}{20} \qquad P(R) = \frac{500}{2\ 000} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

   Puis

$$P(A) = 1 - P(J) - P(R) = \frac{20 - 9 - 5}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

   (b) À l'aide des indications données par l'énoncé (et de la question précédente) :



2. On doit calculer $P(S \cap J) = P(J) \times P_J(S) = \dfrac{9}{20} \times 0{,}95 = 0{,}4275$.

3. On doit calculer $P(S)$, et pour cela on utilise la formule des probabilités totales (et des formules du type de celle utilisée la question précédente) :

$$P(S) = P(S \cap J) + P(S \cap R) + P(S \cap A) = 0{,}4275 + \frac{1}{4} \times 0{,}5 + \frac{3}{10} \times 0{,}7 = 0{,}762\ 5$$

4. On doit calculer :

$$P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{4} \times 0{,}5}{0{,}762\ 5} = \frac{0{,}125}{0{,}762\ 5} \simeq 0{,}164 \simeq 0{,}16$$

5. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante : L'expérience aléatoire consiste à choisir un client au hasard et à lui demander s'il est satisfait ou non.

   L'événement succès est « le client n'est pas satisfait ». La probabilité de cet événement est donc $1 - P(S) = 0{,}237\ 5$.

   On répète cette expérience trois fois de manière indépendante et on compte le nombre de succès. Ce nombre de succès suit alors la loi binomiale de paramètres 3 et 0,237 5. On veut calculer :

$$P(\text{« exactement un succès »}) = 3 \times 0{,}2375 \times 0{,}7625^2 \simeq 0{,}414 \simeq 0{,}41$$

   (Il y a trois branches dans l'arbre associé à cette loi binomiale avec exactement un succès)