Chapitre :
Dérivation

I. Rappels

Soit f une fonction dérivable.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Dessin

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x)$ est positive sur I, alors f est croissante sur I ;
- Si $f'(x)$ est négative sur I, alors f est décroissante sur I ;
- Si $f'(x)$ est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si la dérivée de f s'annule en changeant de signe, alors la fonction admet un extremum.

Deux tableaux de variation

Pour dériver une fonction, on utilise en général les formules de dérivation, disponibles dans le livre.

▶ **Exercices :** QCM 38,39p26

▶ **Exercice :** Ep10 (dérivations diverses)

▶ **Exercices :** 41,42p26 (dérivation et variation)

II. Dérivée d'une composée

⊛ **Activité :** 2p11

Propriété Soit u et g deux fonctions dérivables telles que leur composée $g \circ u$ existe sur un intervalle I. Alors $g \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

Exemple Soit $f(x) = \sqrt{2x+5}$. On peut écrire $f = g \circ u$ avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $u(x) = 2x+5$. f est définie sur $[-\frac{5}{2}; +\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{5}{2}; +\infty[$ (la racine carrée n'étant pas dérivable en 0). $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $u'(x) = 2$. Alors

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = 2 \times g'(2x+5) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

Propriété Les formules de dérivation suivantes proviennent de la propriété précédente :

$$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{u'}{u^{n+1}}$$

Exemple Soit $f(x) = (3x^2+2)^5$. On pose $u(x) = 3x^2+2$. On a alors $f = u^5$. $u'(x) = 6x$, dont $f'(x) = 5 \times u'(x) \times u(x)^{5-1} = 5 \times (6x) \times (3x^2+2)^4 = 30x(3x^2+2)^4$.

▶ **Exercices :** 63,64p30

Propriété Soit g et u deux fonctions **monotones** qui se composent en $g \circ u$.
- Si g et u ont le même sens de variation, alors $g \circ u$ est croissante.
- Si g et u ont des sens de variation opposés, alors $g \circ u$ est décroissante.

▶ **Exercices :** 59p29